This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Hist. of Sci.
Ramsden
3-4-30
20556

Zwölftes Hauptstück.

Von den Gleichungen mit mehr als einer unbekannten Größe.

§. 1.

Es werden oft Fragen aufgegeben, wo mehr als eine unbekannte Größe verlangt wird. Wenn nun dergleichen Fragen auf eine bestimmte Art aufgelöset werden sollen, so muß man so viel Gleichungen daraus ziehen können, als unbekannte Größen verlangt werden. Man muß dergleichen Aufgaben nicht mit denen verwechseln, wo in der That nur eine unbekannte Zahl gefordert wird, die aber mehr als einen Werth bekommen kann, wie wir es im vorigen Hauptstücke bei den Gleichungen von höheren Graden gesehen haben.

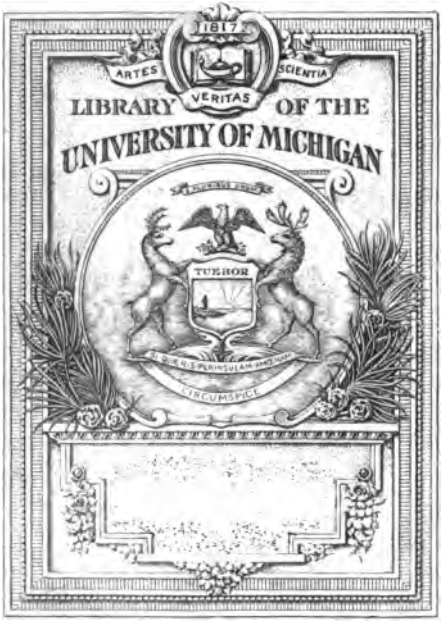
§. 2.

Aufgabe.

Eine Aufgabe mit zwei unbekannten Größen auflösen.

Auflösung. Nachdem man beide Gleichungen, die aus den Bedingungen der Aufgabe fließen, aufgesetzt hat, so ziehe man aus der ersten Gleichung den Werth der einen unbekannten Größe, und diesen Werth setze man an ihre Stelle in die zweite Gleichung. Auf diese Art enthält die zweite Gleichung nur noch eine einzige unbekannte Größe, deren Werth, wie im vorigen Hauptstücke gezeiget worden, allemal in bekannten Größen ausgedruckt werden kann. Diesen gefundenen Werth setze man wiederum in die erste Gleichung oder auch in die zweite, so bekommt man auch die andere unbekannte Größe.

T.158


1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

QA
35
.B92
1801

Der

selbstlehrende

Algebraist,

oder

deutliche Anweisung

zur

ganzen Rechenkunst,

worunter

sowohl die Arithmetik und gemeine Algebra,
als auch die Differenzial- und Integral-Rechnung
begriffen ist,

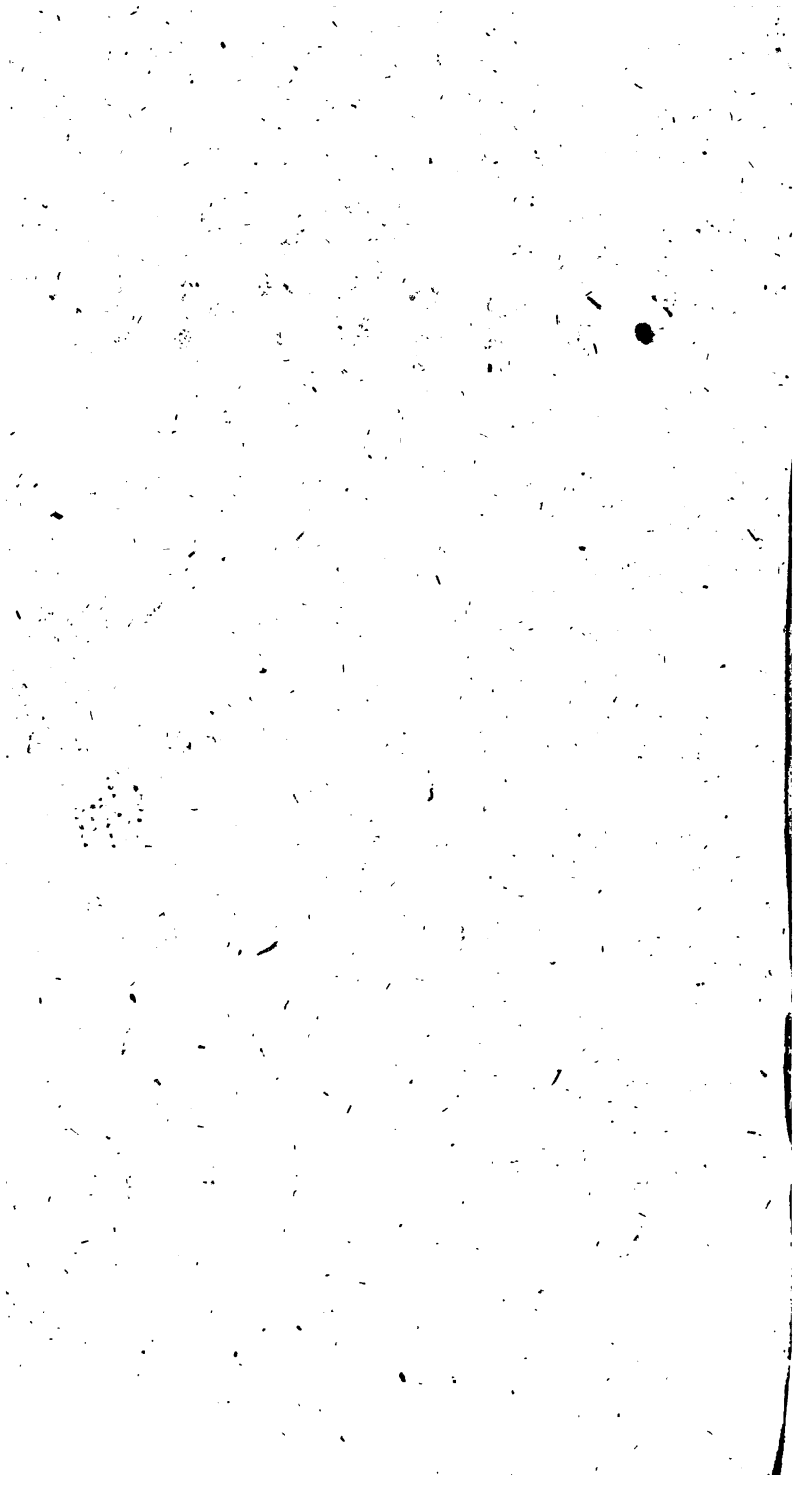
von

Abel Bürja.

Zweiter Theil.

Zweite vermehrte und verbesserte Auflage.

Berlin,
bei F. T. Lagarde.
1802.



Hist. of Sci.
Ramsden
3-4-30
20588

Zwölftes Hauptstück.

Von den Gleichungen mit mehr als einer unbekannten Größe.

§. 1.

Es werden oft Fragen aufgegeben, wo mehr als eine unbekannte Größe verlangt wird. Wenn nun dergleichen Fragen auf eine bestimmte Art aufgelöset werden sollen, so muß man so viel Gleichungen daraus ziehen können, als unbekannte Größen verlangt werden. Man muß dergleichen Aufgaben nicht mit denen verwechseln, wo in der That nur eine unbekannte Zahl gefordert wird, die aber mehr als einen Werth bekommen kann, wie wir es im vorigen Hauptstücke bei den Gleichungen von höheren Graden gesehen haben.

§. 2.

Aufgabe.

Eine Aufgabe mit zwei unbekannten Größen auflösen.

Auflösung. Nachdem man beide Gleichungen, die aus den Bedingungen der Aufgabe fließen, aufgesetzt hat, so ziehe man aus der ersten Gleichung den Werth der einen unbekannten Größe, und diesen Werth setze man an ihre Stelle in die zweite Gleichung. Auf diese Art enthält die zweite Gleichung nur noch eine einzige unbekannte Größe, deren Werth, wie im vorigen Hauptstücke gezeigt worden, allemal in bekannten Größen ausgedruckt werden kann. Diesen gefundenen Werth setze man wiederum in die erste Gleichung oder auch in die zweite, so bekommt man auch die andere unbekannte Größe.

Beiſpiel. Es werden zwei Zahlen verlangt: Wenn man die erſte um 9 vergrößert, ſo wird ſie doppelt ſo groß als die andere; und wenn man die zweite um 3 vergrößert, ſo wird ſie doppelt ſo groß, als die erſte. Es ſeien die verlangten Zahlen x und y, ſo bekommt man dieſe beiden Gleichungen.

$$x+9=2y \quad (A$$
$$y+3=2x \quad (B$$

Die Gleichung A giebt

$$x=2y-9$$

Dieſen Werth von x ſetze man in die Gleichung B, ſo wird

$$y+3=2(2y-9)$$
oder $$y+3=4y-18$$
oder $$18+3=4y-y$$
oder $$21=3y$$
oder $$7=y$$

Da man nun gefunden, daß $y=7$, ſo ſchreibe man 7 anſtatt y in der Gleichung A, ſo kommt

$$x+9=2.7$$
$$x+9=14$$
$$x\ \ =14-9=5$$

Alſo ſind die beiden verlangten Zahlen 7 und 5. Man hätte auch, nachdem gefunden worden $y=7$, dieſen Werth in die Gleichung B ſetzen können.

$$7+3=2x$$
$$10=2x$$
$$5=x$$

Man kann auch damit anfangen, daß man eine von beiden unbekannten Größen in beiden Gleichungen abſondert, oder allein in ein Glied bringet; und übrigens eben ſo verfahren, wie jezt gezeiget worden.

Weil $x+9=2y$, ſo iſt $x=2y-9$ (C

Weil $y+3=2x$, ſo iſt $x=\frac{y+3}{2}$ (D

Setzet

Setzet man nun den Werth von x der durch die Gleichung C gefunden worden, in die Gleichung D, so bekommt man

$$2y - 9 = \frac{y+3}{2}$$
$$4y - 18 = y + 3$$
$$4y - y = 18 + 3$$
$$3y = 21$$
$$y = 7$$

Auf gleiche Weise kann auch x gefunden werden, indem man y absondert.

Weil $x+9=2y$, so ist $y=\frac{x+9}{2}$ (E

Weil $y+3=2x$, so ist $y=2x-3$ (F

Setzet man nun den erst gefundenen Werth von y aus der Gleichung E in die Gleichung F, so wird

$$\frac{x+9}{2} = 2x - 3$$
$$x+9 = 4x - 6$$
$$9+6 = 4x - x$$
$$15 = 3x$$
$$5 = x$$

Eine andere Auflösung. Man kann oft die unbekannten Größen auf eine bequemere Art finden, indem man beide Gleichungen entweder addiret oder subtrahiret, so daß die eine unbekannte Größe verschwindet.

Beispiel. Die Zahl $37\frac{1}{2}$ soll in zwei Theile getheilet werden, so daß der größere Theil den kleineren um $2\frac{1}{3}$ übertreffe. Hier ist also die Summe der unbekannten Größen $37\frac{1}{2}$ und der Unterschied ist $2\frac{1}{3}$.

Zu addire so ist

$$\begin{aligned} x + y &= 37\tfrac{1}{2} \\ x - y &= 2\tfrac{1}{3} \\ \hline 2x &= 39\tfrac{5}{6} \\ 12x &= 239 \\ x &= \tfrac{239}{12} = 19\tfrac{11}{12} \end{aligned}$$

Von subtr. so wird

$$\begin{aligned} x + y &= 37\tfrac{1}{2} \\ x - y &= 2\tfrac{1}{3} \\ \hline 2y &= 35\tfrac{1}{6} \\ 12y &= 211 \\ y &= \tfrac{211}{12} = 17\tfrac{7}{12} \end{aligned}$$

Folglich sind beide verlangte Zahlen $19\frac{11}{12}$ und $17\frac{7}{12}$. Die Summe derselben ist $37\frac{1}{2}$, und der Unterschied $2\frac{1}{3}$. Diese Frage kann auch mit einer einzigen unbekannten Größe aufgelöset werden, indem man seßet, die eine Zahl sei x und die andere $x + 2\frac{1}{3}$. Siehe das XI. Hauptst. §. 2. Ueberhaupt, wie dort schon erinnert worden, lassen sich Aufgaben, wo mehr als eine unbekannte Größe vorkommt, oft mit einer einzigen auflösen, wenn nämlich die Verhältnisse der unbekannten Größen unter sich sehr einfach sind.

Noch eine andere Auflösung. Wenn die unbekannten Größen in beiden Gleichungen verschiedene Koeffizienten haben, so multiplizire man die erste Gleichung mit dem Koeffizienten, welchen die Größe x in der anderen Gleichung hat. Ebenfalls multiplizire man die zweite Gleichung mit dem Koeffizienten, welchen x in der ersten Gleichung bei sich führet. Hernach addire oder subtrahire man beide Gleichungen, so verschwindet x und man bekommt den Werth von y. Eben so verfahre man mit y um x zu finden.

Beispiel. Es werden zwei Zahlen verlanget: das Vierfache der ersten, mit dem Fünffachen der zweiten machet

chet 23. Das siebenfache der ersten mit dem Zweifachen der anderen, machet 20. Es ist also

$$4x + 5y = 23$$
$$7x + 2y = 20$$

Um x wegzuschaffen, multiplizire man die erste Gleichung, das ist, alle Glieder derselben, mit 7, und die zweite Gleichung mit 4. Hernach subtrahire man die zweite von der ersten.

Von $28x + 35y = 161$
subtr. $28x + 8y = 80$

so wird $27y = 81$
$y = \frac{81}{27} = 3$

Um nun auch *y wegzuschaffen*, multiplizire man die zweite Gleichung mit 5 und die erste mit 2, hierauf subtrahire man die erste von der zweiten.

$$35x + 10y = 100$$
$$8x + 10y = 46$$

$$27x \ldots = 54$$
$$x \ldots = \frac{54}{27} = 2$$

Also sind die verlangten Zahlen 3 und 2. Wenn beide Koeffizienten, womit man multipliziren soll, ein gemeinschaftliches Maß haben, so kann man sie in Gedanken oder in der That durch das gemeinschaftliche Maß dividiren, und bei der Multiplikazion die Quozienten anstatt der Koeffizienten selbst, gebrauchen. Es sei

$$6x + 5y = 97 \parallel 3 \mid 1$$
$$4x + 10y = 138 \parallel 2 \mid 2$$

Hier lassen sich die Koeffizienten 6 und 4 durch 2 messen, und die Quozienten sind 3 und 2. Ebenfalls laßen sich die Koeffizienten 5 und 10 durch 5 messen, und die Quozienten sind 1 und 2. Man muß also die erste Gleichung mit 2 und die andere mit 3 multipliziren, um 2 wegzuschaffen,

Ferner muß man die erste Gleichung mit 2 und die andere mit 1 multipliziren um y wegzuschaffen.

$$\begin{array}{rl} 12x + 10y = & 194 \\ 12x + 30y = & 414 \\ \hline -20y = & -220 \\ \text{oder } +20y = & +220 \end{array}$$

$$y = \frac{220}{20} = 11$$

$$\begin{array}{rl} 12x + 10y = & 194 \\ 4x + 10y = & 138 \\ \hline 8x \ldots = & 56 \\ x \ldots = & 56 : 8 = 7 \end{array}$$

Die unbekannten Zahlen sind also 7 und 11.

Anmerkung. Die Regeln, welche wir hier gegeben haben, sind zwar für die gewöhnlichsten arithmetischen Aufgaben hinreichend. Aber in schwereren Fällen, und hauptsächlich wenn Potenzen der unbekannten Größen vorhanden sind, muß sich ein jeder durch eigenes Nachdenken zu helfen suchen. Oft muß man die Glieder einer Gleichung zur Potenz erheben, welche sich in der anderen Gleichung findet, damit man beiderseits gleich hohe Potenzen bekomme. Es sei gegeben $p = 3yz$ und $q = y^3 + z^3$. Um hier in beiden Gleichungen die nämlichen Potenzen zu bekommen, erhebe man die Glieder der ersten Gleichung zur dritten Potenz, so bekommt man folgende zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} p^3 &= 27y^3z^3 \\ q &= y^3 + z^3 \end{aligned}$$

Aus diesen beiden Gleichungen lassen sich y und z bestimmen, wie schon im vorigen Hauptstücke §. 26 bei Gelegenheit der kubischen Gleichungen gezeiget worden. Was wir hier y genannt haben, heißt dort a, und was hier z genannt ist, heißt dort b.

§. 3.

§. 3.

Aufgabe.

Eine Aufgabe auflösen, wo mehr als zwei unbekannte Größen vorkommen.

Auflösung. Man suche vor allen Dingen in der Aufgabe so viel Gleichungen als unbekannte Größen sind. Nun sondere man die eine unbekannte Größe x in der ersten Gleichung ab, so daß sie allein ein Hauptglied ausmache, und den gefundenen Werth setze man in die zweite Gleichung. In dieser veränderten zweiten Gleichung, sondere man eine andere unbekannte Größe y ab, und ihren Werth setze man in den gefundenen Werth von x. Die Werthe von x und y setze man in die dritte Gleichung, und sondere noch eine andere unbekannte Größe z ab. Den gefundenen Werth der Größe z setze man in den vorher gefundenen Werth von x und y. Sind noch mehrere unbekannte Größen, so fahre man fort, sie alle eine nach der anderen wegzuschaffen. Zulezt erhält man eine Gleichung mit einer einzigen unbekannten Größe. Und wenn ihr Werth gefunden ist, so braucht man ihn nur in die vorher gefundenen Werthe der übrigen unbekannten Größen zu setzen, um sie alle zu bekommen.

Beispiel. Es werden drei Zahlen verlanget. Die erste und zweite machen zusammen 23, die erste und dritte 24, die zweite und dritte 25. Diese Frage enthält folgende 3 Gleichungen.

$$x + y = 23 \quad (A$$
$$x + z = 24 \quad (B$$
$$y + z = 25 \quad (C$$

Wenn man x in der Gleichung A absondert, so ist

$$x = 23 - y \quad (D$$

Wenn man diesen Werth von x in die Gleichung B setzet, so wird

$$23 - y + z = 24$$

Wenn man hier y absondert, so ist

$$23 - 24 + z = y$$

oder $$y = z - 1 \quad (E$$

Setzet man diesen Werth von y in die Gleichung D, welche den Werth von x ausdrucket, so wird

$$x = 23 - (z - 1)$$
$$x = 23 - z + 1$$
$$x = 24 - z \quad (F$$

Den gefundenen Werth von y, nämlich aus der Gleichung E setze man nun auch in die dritte gegebene Gleichung, nämlich C, so entstehet

$$(z - 1) + z = 25$$
$$2z - 1 = 25$$
$$2z = 26$$
$$z = 13$$

Hätte die Gleichung C nicht x enthalten, so hätte dessen Werth F eingesetzet werden müssen. Da nun z bekannt ist, so setze man dessen Werth, nämlich 13, in die letztgefundenen Werthe von x und y, nämlich in die Gleichungen E und F, so bekommt man

$$y = 13 - 1 = 12$$
$$y = 24 - 13 = 11$$

Die verlangten Zahlen sind also 11, 12 und 13. Es ist $11 + 12 = 23$, $11 + 13 = 24$, $12 + 13 = 25$, wie in der Aufgabe gefordert wurde.

Eine andere Auflösung. Man findet oft die Werthe aller unbekannten Größen, indem man die gegebenen Gleichungen verschiedentlich addiret oder subtrahiret.

Beispiel. Es werden drei Zahlen verlanget. Die beiden ersten machen zusammen 6, die erste und dritte machen 11, die zweite und dritte machen 15. Also ist

$$x + y = 6 \quad (A$$
$$x + z = 11 \quad (B$$
$$y + z = 15 \quad (C$$

Von A subtrahire man B, und addire hernach C

$$\begin{array}{rr} & x + y = 6 \\ \text{subtr.} & x + z = 11 \\ \hline & y - z = -5 \\ \text{addire} & y + z = 15 \\ \hline & 2y = 10 \\ & y = 5 \end{array}$$

Von B subtrahire man A, und addire C

$$\begin{array}{rr} & x + z = 11 \\ \text{subtr.} & x + y = 6 \\ \hline & z - y = 5 \\ \text{addire} & z + y = 15 \\ \hline & 2z = 20 \\ & z = 10 \end{array}$$

Von A subtrahire man C, und addire B

$$\begin{array}{rr} & x + y = 6 \\ \text{subt.} & z + y = 15 \\ \hline & x - z = -9 \\ \text{addire} & x + z = 11 \\ \hline & 2x \ldots = 2 \\ & x \ldots = 1 \end{array}$$

Die verlangten Zahlen sind also 1, 5 und 10. Uebrigens hätte man diese Frage eben so gut nach der ersten Regel auflösen können.

Noch eine andere Auflösung. Wenn die Gleichungen alle die nämliche Gestalt haben, und nur die Koefizienten verschieden sind, so kann man folgender Maßen verfahren. Man vergleichet die erste und zweite Gleichung, hernach die erste und dritte, ferner die erste und vierte, u. s. w. indem man jedesmal die erste unbekannte Größe vermittelst der Multiplikazion und Subtrakzion weg-

wegschaffet, wie in §. 2 in der dritten Auflösung gezeiget worden. Wenn dieses geschehen, so hat man eine Gleichung weniger als vorher, und auch eine unbekannte Größe weniger. Nun wiederhole man das nämliche Verfahren, bis daß nur eine einzige Gleichung mit einer einzigen unbekannten Größe bleibet, und man folglich den Werth derselben finden kann. Verändert man hernach die Ordnung der unbekannten Größen, so kann man die übrigen auf die nämliche Art finden.

Beispiel. Es werden drei Zahlen verlanget. Das Doppelte der ersten, das Dreifache der zweiten und das Vierfache der dritten, machen zusammen 20. Das Vierfache der ersten, das Dreifache der zweiten und das Doppelte der dritten machen zusammen 16. Das Dreifache der ersten, das Doppelte der zweiten, und das Vierfache der dritten, machen zusammen 19. Diese Frage giebt folgende Gleichungen.

$$2x + 3y + 4z = 20 \quad (A$$
$$4x + 3y + 2z = 16 \quad (B$$
$$3x + 2y + 4z = 19 \quad (C$$

Man nehme die beiden ersten Gleichungen A und B, und schaffe x hinaus. (§. 2 dritte Auflös.) Weil die Koeffizienten 2 und 4 durch 2 gemessen werden, so braucht man nur die Quozienten 1 und 2 zu Multiplikatoren anzunehmen; die erste Gleichuug wird also mit 2 und die zweite mit 1 multipliziret. Hierauf wird subtrahiret.

$$4x + 6y + 8z = 40$$
$$\text{subtr.}\quad 4x + 3y + 2z = 16$$
$$\overline{\qquad\qquad 3y + 6z = 24}$$
$$\text{oder}\quad y + 2z = 8 \quad (D$$

Nun nehme man die erste und dritte Gleichung, nämlich A und C, und schaffe ebenfalls x weg, indem man A mit 3 und C mit 2 multipliziret, und hierauf subtrahiret.

$6x + 9y$

$$\begin{array}{rl} & 6x + 9y + 12z = 60 \\ \text{subt.} & 6x + 4y + 8z = 38 \\ \hline & 5y + 4z = 22 \quad \text{(E} \end{array}$$

Man hat also die drei gegebenen Gleichungen schon bis auf 2 vermindert, nämlich

$$\begin{array}{rl} y + 2z = 8 & \text{(D} \\ 5y + 4z = 22 & \text{(E} \end{array}$$

Aus diesen beiden schaffe man y weg, indem man die erste mit 5 und die zweite mit 1 multipliziret.

$$\begin{array}{rl} & 5y + 10z = 40 \\ \text{subtr.} & 5y + 4z = 22 \\ \hline & 6z = 18 \\ & z = 18 : 6 = 3 \end{array}$$

So wie z gefunden worden, könnte man auch y finden. Man müßte aus den drei Gleichungen A, B und C erstlich z und hernach x wegschaffen. Eben so ließe sich x finden, wenn man z und y wegschaffete. Hier aber läßt sich die Arbeit erleichtern Man nehme die Gleichungen D und E wieder vor, und schaffe daraus z weg, so bekommt man y.

$$\begin{array}{rl} y + 2z = 8 & \| \; 1 \\ 5y + 4z = 22 & \| \; 2 \\ \hline 2y + 4z = 16 & \\ 5y + 4z = 22 & \\ \hline -3y \ldots = -6 & \\ 3y \ldots = 6 & \\ y \ldots = 6 : 3 = 2 & \end{array}$$

Da nun z und y bekannt sind, so kann man x finden, wenn man die Werthe von z und y in eine der gegebenen Gleichungen setzet. Z. B.

Weil

Weil $2x + 3y + 4z = 20$ (A)
so ist $2x + 3.2 + 4.3 = 20$
$2x + 6 + 12 = 20$
$2x + 18 = 20$
$21 = 20 - 18 = 2$
$x = 1$

Die drei verlangten Zahlen sind folglich 1, 2 und 3 Man mache die Probe.

1, doppelt machet 2	1, vierfach 4	1, dreifach 3
2, dreifach . . . 6	2, dreifach 6	2, doppelt 4
3, vierfach . . . 12	3, doppelt 6	3, vierfach 12
20	16	19

§. 4.

Eine **unbestimmte Aufgabe**, ist diejenige, wo weniger Gleichungen gegeben werden, als unbekannte Grössen sind, so daß sich die unbekannten Größen nicht durch die bekannten bestimmen lassen, sondern nur ihr Verhältniß gegen einander gefunden wird.

Man muß diese unbestimmten Aufgaben nicht mit den unbestimmten Zahlen verwechseln, die durch Buchstaben ausgedrücket werden. Eine unbestimmte Aufgabe kann so wohl bei bestimmten als unbestimmten Koeffizienten statt finden. Es wäre vielleicht rathsamer gewesen, wenn die Erfinder diese Art der Aufgaben lieber willkührliche Aufgaben oder veränderliche Aufgaben genannt hätten.

§. 5.

Eine unbestimmte Aufgabe auflösen.

Auflösung. Man suche aus den gegebenen Gleichungen die Werthe so vieler unbekannten Größen als Gleichungen gegeben sind. Diese Werthe werden noch unbekannte Größen enthalten, welche man alsdann bestimmen kann, wie man will; die anderen müssen sich darnach richten.

Bei-

Beispiel I. Man verlanget zwei Zahlen. Das Vierfache der ersten soll dem Quadrate der anderen gleich sein. Hier sind zwei unbekannte Größen, aber es ist nur eine Gleichung, nämlich

$$4x = yy$$

folglich $$x = \frac{yy}{4}$$

Hier bleibet y unbestimmt, und man mag anstatt y eine Zahl annehmen, wie man will, so wird sie allemal der Frage Genüge leisten. Es sei $y = 6$, so wird

$$x = \frac{6 \cdot 6}{4} = 9$$

Also sind 9 und 6 Zahlen, welche die verlangete Eigenschaft haben. Es sei $y = 10$, so wird

$$x = \frac{10 \cdot 10}{4} = 25$$

Also sind die Zahlen 25 und 10 eben so gut, als 9 und 5, die Frage aufzulösen. Mit einem Worte, so bald y bestimmt wird, folget der gehörige Werth von x aus der gefundenen Gleichung.

Anstatt daß man hier x in der gegebenen Gleichung abgesondert hat, hätte man auch y absondern können.

Weil $4x = yy$
so ist $\sqrt{4x} = y$
oder $2\sqrt{x} = y$

Setzet man nun anstatt x, welche Zahl man will, so giebt deren Quadratwurzel, doppelt genommen, einen Werth von y. Es sei z. B. $x = 49$ so ist $\sqrt{x} = 7$, und $3\sqrt{x}$ oder $y = 14$. Also haben die Zahlen 49 und 14 die vorgeschriebene Eigenschaft. Es ist nämlich 4 mal $49 = 196$ und $14^2 = 196$.

Beispiel II. Man soll drei Zahlen finden. Deren Summe 20 sein soll; ferner soll 138 entstehen, wenn

man

man die erste fünfmal, die zweite siebenmal, und die dritte achtmal nimmt. Hier haben wir zwei Gleichungen

$$x + y + z = 20 \quad (A$$
$$5x + 7y + 8z = 138 \quad (B$$

Man multiplizire die Gleichung A mit 5 und B mit 1, und subtrahire.

$$\begin{array}{rl} & 5x + 5y + 5z = 100 \\ \text{subt.} & 5x + 7y + 8z = 138 \\ \hline & -2y - 3z = -38 \end{array}$$

$$\text{oder} \quad 2y + 3z = 38 \quad (C$$

Man multiplizire ferner die Gleichung A mit 7 und B mit 1, und subtrahire

$$\begin{array}{rl} & 7x + 7y + 7z = 140 \\ \text{subtr.} & 5x + 7y + 8z = 138 \\ \hline & 2x \quad\quad - z = 2 \end{array} \quad (D$$

Wenn man nun aus den Gleichungen C und D, y und x absondert, so bekommt man

$$y = 19 - \frac{3z}{2}$$
$$x = \tfrac{1}{2}z + 1$$

Hier bleibet z unbestimmt. Man setze also anstatt z welche Zahl man will, so wird allemal für y und x ein Werth heraus kommen, welcher der Frage entspricht. Z. B. Man nehme $z = 2$, so wird

$$x = 2$$
$$y = 16$$
$$z = 2$$

Man nehme $z = 4$, so ist

$$x = 3$$
$$y = 13$$
$$z = 4$$

Es sei $z = 6$, so ist

$$x = 4$$
$$y = 10$$
$$z = 6$$

Man nehme $z = 8$, so wird

$$x = 5$$
$$y = 7$$
$$z = 8$$

Und so kann man den Werth von z bestimmen, wie man will.

Beispiel III. Man suche vier Zahlen. Deren Summe ist 10. Die erste fünfmal genommen, die zweite sechsmal, die dritte siebenmal, die vierte achtmal, machen zusammen 70. Diese Frage giebt nur zwei Gleichungen, obgleich vier Zahlen unbekannt sind.

$$v + x + y + z = 10$$
$$5v + 6x + 7y + 8z = 70$$

Man vertilge aus diesen Gleichungen erstlich eine von den unbekannten Zahlen, z. B. z, indem man die erste Gleichung mit 8 und die andere mit 1 multipliziret und hernach subtrahiret.

$$\begin{array}{rl} & 8v + 8x + 8y + 8z = 80 \\ \text{subtr.} & 5v + 6x + 7y + 8z = 70 \\ \hline & 3v + 2x + y \;\ldots = 10 \quad \text{(G} \end{array}$$

Man vertreibe noch eine unbekannte Größe aus den gegebenen Gleichungen, z. B. y, vermittelst der Multiplikazion mit 7 und mit 1.

$$\begin{array}{rl} & 7v + 7x + 7y + 7z = 70 \\ \text{subtr.} & 5v + 6x + 7y + 8z = 70 \\ \hline & 2v + x \ldots - z = 0 \quad \text{(H} \end{array}$$

Aus den Gleichungen G und H, sondere man y und z ab, so bekommt man,

aus G) $y = 10 - 3v - 2x$ (I

aus H) $z = 2v + x$ (K

Die Zahlen v und x bleiben also willkürlich, und man kann sie bestimmen wie man will. Man setze jedesmal ihren angenommenen Werth in den Gleichungen I und H, so werden dadurch y und z bestimmet werden.

Es sei $v = 1$ und $x = 2$, so wird

$$v = 1$$
$$x = 2$$
$$y = 3$$
$$z = 4$$

Es sei $v = 1$ und $x = 3$, so wird

$$v = 1$$
$$x = 3$$
$$y = 1$$
$$z = 5$$

Es sei $v = 1$ und $x = 1$, so wird

$$v = 1$$
$$x = 1$$
$$y = 5$$
$$z = 3$$

Und so kann die Frage auf unendlich viel Arten aufgelöset werden.

§. 6.

Verneinte Größen können zwar in der Algebra, eben sowohl als bejahete, zur Auflösung der unbestimmten Aufgaben dienen. Jedoch werden in den arithmetischen Aufgaben meistens bejahete Zahlen verlanget. Um nun solche zu erhalten, gebe man Achtung, ob in den gefundenen Gleichungen, wo der Werth einer unbekannten Größe durch bekannte und unbekannte ausgedrucket ist, verneinte Größen enthalten sind oder nicht. Sind keine verneinte Größen darinn, so darf man nicht befürchten, daß man bei der Auflösung auf verneinte Zahlen gerathe, man mag übrigens die willkürlichen Größen, so groß oder so klein

annehs

annehmen als man will. Sind aber verneinte Größen in den lezten Gleichungen vorhanden, so müssen die bejaheten Theile größer sein als die verneinten, wenn ein bejaheter Werth herauskommen soll. Dieses drucke man durch das Zeichen der Ungleichheit aus, und verfahre hernach mit dem gefundenen Ausdrucke der Ungleichheit, wie mit einer Gleichung; so wird sich finden, wie groß oder wie klein die willkürlichen Größen angenommen werden können, wenn alle verlangete Größen bejahet werden sollen.

Im ersten Beispiele des vorigen Paragraphs hat man gefunden

$$x = \frac{yy}{4}$$

oder $y = 2\sqrt{x}$

Da hier im Werthe von x und y keine verneinte Größe vorkommt, so kann man y oder x so groß oder so klein bestimmen, als man will. So bald man nur für die eine unbekannte Größe einen bejaheten Werth annimmt, so wird die andere auch bejahet werden.

Im zweiten Beispiele hat man gefunden

$$y = 19 - \frac{3z}{2}$$

$$x = \tfrac{1}{2}z + 1$$

In der ersten dieser Gleichungen enthält der Werth von y eine bejahete und eine verneinte Größe. Wenn also y bejahet werden soll, so muß die bejahete Größe nothwendig mehr gelten als die verneinte. Es muß also sein

$$19 \;?\; \frac{3z}{2}$$

folglich $38 \;?\; 3z$

$$\frac{38}{3} \;?\; z$$

$$12\tfrac{2}{3} \;?\; z$$

Woraus man siehet, daß, wenn y bejahet werden soll, z nothwendig kleiner als $12\frac{2}{3}$ angenommen werden muß. Wird $z = 12\frac{2}{3}$ angenommen, so wird $y = 0$, wird aber z größer als $12\frac{2}{3}$ angenommen, so wird y verneinend. Man versuche z. B. anzunehmen $z = 13$.

$$\text{Weil } y = 19 - \frac{3z}{2}$$

$$\text{so wird } y = 19 - \frac{3 \cdot 13}{2}$$

$$\text{oder } 2y = 38 - 3 \cdot 13$$
$$\text{oder } 2y = 38 - 39$$
$$\text{oder } 2y = -1$$
$$\text{oder } y = -\tfrac{1}{2}$$

Im dritten Beispiele des vorigen Paragraphs wurde gefunden

$$y = 10 - 3v - 2x$$
$$z = 2v + x$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folget, daß man, um y bejaht zu bekommen, nehmen müsse

$$10 \gtrless 3v + 2x$$

Folglich müssen v und x so bestimmet werden, daß 3 mal v und 2 mal x weniger als 10 ausmachen. Aus diesem Ausdrucke der Ungleichheit folget ferner

$$10 - 3v \gtrless 2x$$
$$5 - \tfrac{3}{2}v \gtrless x$$

Wenn also x bejahet werden soll, so muß noch sein

$$5 \gtrless \tfrac{3}{2}v$$
$$10 \gtrless 3v$$
$$3\tfrac{1}{3} \gtrless v$$

Aus der nämlichen Ungleichung, wenn ich es so nennen darf, nemlich aus $10 \gtrless 3v + 2x$, folget wiederum

$$10 - 2x \gtrless 3v$$

Folg-

Folglich wenn y bejahet werden soll, so ist

$$10 \; 7 \; 2x$$
$$5 \; 7 \; x$$

Also muß x kleiner als 5 angenommen werden. Aus allem diesen siehet man, daß wenn alle Größen in der Auflösung bejahet werden sollen, man nothwendig y unter $3\frac{1}{2}$ bestimmen müsse, und x unter 5, jedoch allemal so daß y dreimal genommen und x zweimal genommen, nicht über 10 ausmachen. Wenn man nämlich y unter $3\frac{1}{3}$ bestimmet hat, so muß man den angenommenen Werth dreifach nehmen und ihn von 10 subtrahiren, so bleibet ein Rest, welchen das zweifache x nicht übersteigen soll. Man dividire also diesen Rest durch 2, so kommt ein Werth den x nicht übersteigen soll. Z. B. Gesetzet man hätte angenommen $y = 2$, so ist $3y = 6$. Diese 6 von 10 abgezogen, so bleiben für $2x$ noch 4, oder für x noch 2. Es muß also x unter 2 sein, wenn y bejahet werden soll. Will man erstlich x bestimmen, so nehme man x unter 5, den angenommenen Werth verdoppele man, so hat man $2x$. Dieses Doppelte ziehe man von 10 ab. Was übrig bleibet, ist für die $3y$. Man nehme also den dritten Theil des Restes, so bekommt man den Werth, welchen y nicht übersteigen kann. Es sei $x = 4$, so ist $2x = 8$. Diese 8 von 10 abgezogen, so bleiben 2. Davon ist der dritte Theil $\frac{2}{3}$. Wenn also x, 4 gilt, so muß y unter $\frac{2}{3}$ angenommen werden, damit y bejahet werde.

§. 7.

In vielen arithmetischen Aufgaben werden nicht nur bejahete Zahlen, sondern zugleich ganze Zahlen ohne Brüche verlanget. Es muß also gezeiget werden, wie man solche erhalten kann. Es sei diese Frage aufgegeben. Es sind zwei ganze Zahlen; wenn man die eine mit 25 und die andere mit 16 multiplizirt, so ist das zweite Produkt um 1 größer, als das erste: welches sind diese beiden Zahlen?

Die eine sei x und die andere y, so wird

$$25x+1=16y$$

$$\frac{25x+1}{16}=y$$

Der Umstand, daß x und y ganze Zahlen sein sollen, machet daß man nicht der Größe x einen jeden Werth nach Belieben geben kann. Man dividire den Zähler $25x+1$ durch den Nenner 16, so bekommt man

$$y=\frac{25x+1}{16}=x+\frac{9x+1}{16}$$

Es sei nun der neue Bruch $\frac{9x+1}{16}=k$, so ist $9x+1$. $=16k$, und $x=\frac{16k-1}{9}$. Man verrichte wiederum die Division, so bekommt man

$$x=\frac{16k-1}{9}=k+\frac{7k-1}{9}$$

Es sei $\frac{7k-1}{9}=l$, so ist $7k-1=9l$ und $k=\frac{9l+1}{7}$. Wenn man noch dividiret, so wird

$$k=\frac{9l+1}{7}=l+\frac{2l+1}{7}$$

Es sei $\frac{2l+1}{7}=m$, so wird $2l+1=7m$ und $l=\frac{7m-1}{2}$. Man dividire weiter

$$l=\frac{7m-1}{2}=3m+\frac{m-1}{2}$$

Es sei $\frac{m-1}{2}=n$, so ist $m-1=2n$, und $m=2n+1$. Hier höret man auf zu dividiren, weil kein Bruch mehr vorhanden ist. Nun gehe man rückwärts, so hat man

$m=2n$

$$\begin{aligned} m &= 2n + 1 \\ l &= 3m + n = 7n + 3 \\ k &= l + m = 9n + 4 \\ x &= k + l = 16n + 7 \\ y &= x + k = 25n + 11 \end{aligned}$$

Man siehet leicht ein, daß wenn man für n eine ganze Zahl annimmt, die Größen $16n + 7$ und $25n + 11$ auch ganze Zahlen werden müssen. Nimmt man an $n = 0$, so wird

$$\begin{aligned} x &= 7 \\ y &= 11 \end{aligned}$$

Nimmt man $n = 1$, so wird

$$\begin{aligned} x &= 23 \\ y &= 36 \end{aligned}$$

Nimmt man $n = 2$, so ist

$$\begin{aligned} x &= 39 \\ y &= 61 \end{aligned}$$

Nimmt man $n = 3$, so bekommt man

$$\begin{aligned} x &= 55 \\ y &= 86 \end{aligned}$$

Nimmt man $n = 4$, so entstehet

$$\begin{aligned} x &= 71 \\ y &= 111 \end{aligned}$$

Bei ähnlichen unbestimmten Gleichungen mit zwei unbekannten Größen kann man auf eine ähnliche Art verfahren. Nur muß man diejenige unbekannte Zahl absondern, deren Werth so beschaffen ist, daß die Division statt finden könne. Z. B. Die gegebene Gleichung war

$$25x + 1 = 16y$$

hätte man x abgesondert, so würde man bekommen haben

$$x = \frac{16y - 1}{25}$$

wo der Nenner gröſſer iſt, als 16, und folglich die angezeigete Methode nicht Statt finden kann.

Bei andern Fällen muß man ſuchen, ſich auf eine andere Art zu behelfen. Z. B. Beim erſten Beiſpiele im §. 5, war die Gleichung

$$x = \frac{yy}{4} = \frac{y \cdot y}{2.2} = \frac{y}{2} \times \frac{y}{2}$$

Soll nun $\frac{y}{2} \cdot \frac{y}{2}$ eine ganze Zahl ſein, ſo muß y durch 2 gemeſſen werden. Folglich muß y entweder 2 oder ein Multiplum von 2, das iſt, eine Paarzahl ſein.

§. 8.

Die **Alligazion-Rechnung** oder **Miſchrechnung**, iſt die Kunſt, Dinge von verſchiedenem Werthe, ſo mit einander zu vermiſchen, daß das Vermiſchte einen gewiſſen geſetzten Werth bekomme. Dieſe Rechnungsart gehöret hierher, weil ihr Beweis ſich auf Gleichungen gründet, worinn mehr als eine unbekannte Zahl vorkommt.

Wenn zwei Dinge von verſchiedenem Werthe mit einander zu vermiſchen ſind, ſo ſchreibe man die Werthe der Einheit von jeder zu vermiſchenden Sache gerade unter einander. Den gemeinſchaftlichen Werth, welchen die Einheit erhalten ſoll, ſchreibe man linker Hand gegen die Mitte. Es muß nun der gemeinſchaftliche Werth kleiner ſein, als der Werth des einen, und gröſſer als der Werth des anderen zu vermiſchenden Dinges. Den kleineren Werth ziehe man vom mittleren ab, und ſchreibe den Reſt zur Rechten neben den gröſſeren Werth. Den mittleren Werth ziehe man ferner vom gröſſeren ab, und ſchreibe den Reſt neben den kleineren. Die aufgeſchriebenen Unterſchiede zeigen das Verhältniß an, wornach die Vermiſchung geſchehen muß, damit die Einheit den geſetzten gemeinſchaftlichen Werth erhalte.

Bei-

Beispiel I. Von einer Art Wein kostet das Maß 6 Groschen, von einer anderen Art, 16 Groschen; wie muß man diese Weine vermischen, daß das Maß 12 Groschen zu stehen komme?

12	6	4
	16	6

Hier sage ich, 6 von 12 bleiben 6, die ich neben 16 schreibe. Ferner, 12 von 16 bleiben 4, die ich neben 6 schreibe. Ich sehe also, daß vom schlechteren Weine allemal 4 Maß gegen 6 Maß vom besseren genommen werden müssen. Will ich also eine gewisse Quantität vom mittleren Preise erhalten, z. B. 100 Maß, so bediene ich mich der Gesellschaftsrechnung (IX. Hauptst. §. 44). Die Verhältnißzahlen sind 4 und 6. Diese werden addiret. Dann wird gesaget: 10 Maß geben 4 Maß schlechteren Weines, wie viel 100 Maß? und 10 Maß geben 6 Maß besseren Weines, wie viel 100 Maß?

4 schlechterer
6 besserer
10 vermischter.

		4
1ø		10ø
		40 schlechterer
		6
1ø		10ø
		60 besserer.

40 schlechterer
60 besserer
100 vermischter.

Will ich nur wissen, wie viel von jeder Sorte auf 1 Maß kommen soll, so muß ich sagen: 10 Maß geben 4, was 1 Maß? und 10 Maß geben 6, was 1 Maß?

$$\begin{array}{lr} & 4 \\ 10 & 1 \\ \hline & \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \text{ schlechterer} \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} & 6 \\ 10 & 1 \\ \hline & \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \text{ besserer.} \end{array}$$

Wenn man also erfahren will, wie viel von jeder Art auf die Einheit gehet, so sammle man die gefundenen Unterschiede, und theile jeden Unterschied durch die Summe beider Unterschiede.

$$\begin{array}{r|c|l} 6 & 4 & \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \\ 12 & & \\ 16 & 6 & \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \\ \hline & 10 & \end{array}$$

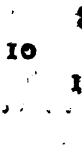
Man kann sich auch der gefundenen Brüche bedienen um zu finden, wie viel von jeder Sorte auf eine gewisse Menge des Gemischten gehen soll. Man darf nur die gegebene Menge mit den gefundenen Brüchen multipliziren. Will ich also wissen, wie viel von jeder Art Wein auf 100 Maß genommen werden soll, so bekomme ich

$$\frac{2}{5} \cdot 100 = 40 \text{ schlechterer}$$
$$\frac{3}{5} \cdot 100 = 60 \text{ besserer.}$$

Denn weil auf 1 Maß $\frac{2}{5}$ schlechteren Weines genommen werden muß, so müssen auf 100 Maß, auch 100 mal $\frac{2}{5}$ genommen werden. Und weil 1 Maß $\frac{3}{5}$ besseren Weines enthält, so müssen 100 Maß 100mal $\frac{3}{5}$ davon enthalten.

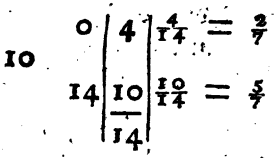
Beispiel II. Wie muß 8löthiges und 11löthiges Silber vermischet werden, daß 10löthiges daraus entstehe? Um diese Frage zu verstehen, muß man wissen, daß 8, 10, 11löthiges Silber so viel ist, als Silber wo auf eine Mark oder 16 Loth allemal 8, 10 oder 11 Loth rein Silber sind, und das übrige Kupfer. Hier kann man das reine Silber

ber als den Werth der Mark betrachten, welche also 8, 10 oder 11 Loth rein Silber gilt.



Es muß also vom schlechteren Silber auf die Mark, oder überhaupt auf jede Menge $\frac{1}{3}$ und vom besseren $\frac{2}{3}$ genommen werden.

Beispiel III. Wie viel Kupfer muß zu 14löthigem Silber geschmolzen werden, daß es 10löthig werde. Hier enthält die Mark Kupfer kein Silber, also ist ihr Werth an reinem Silber 0 Loth.



Es müßen folglich auf 1 Mark, oder auf jede andere Menge $\frac{2}{7}$ Kupfer und $\frac{5}{7}$ vierzehnlöthigen Silbers genommen werden.

Beispiel IV. Man hat zweierlei Getreide: von dem einen kostet der Scheffel $\frac{3}{4}$ Thaler und von dem anderen $1\frac{1}{6}$ Thaler. Wie muß es vermischet werden, daß der Scheffel $\frac{7}{8}$ Thaler zu stehen komme. Der Aussatz stehet anfänglich also

$$\frac{3}{4}$$
$$\frac{7}{8}$$
$$1\frac{1}{6}$$

Um hier die Brüche wegzuschaffen, multiplizire man die drei gegebenen Werthe mit dem gemeinschaftlich Gemessenen der Nenner, nämlich hier mit 24, so bekommt man folgende Rechnung

	18	7	$\frac{7}{10}$
21			
	28	3	$\frac{3}{10}$
		10	

Es müssen also vom schlechteren Getreide $\frac{7}{10}$ und vom besseren $\frac{3}{10}$ genommen werden.

Beweis. Laßt uns das letzte Beispiel zum Beweise allgemeiner machen. Gesetzet, vom schlechteren Korne kostet der Scheffel a Thaler, vom besseren b Thaler, vom mittleren soll der Scheffel c Thaler kosten. Wie viel muß man von jeder Art nehmen, daß auf eine Menge von d Scheffeln, der Scheffel wirklich c Thaler zu stehen komme? Gesetzet man müße vom schlechteren zu a Thaler, x Scheffel nehmen, und vom besseren zu b Thaler y Scheffel. So müssen diese x und y Scheffel zusammen d Scheffel ausmachen. Dieses giebt die erste Gleichung

$$x+y=d \quad \text{(A}$$

Ferner, x Scheffel, den Scheffel zu a Thaler, kosten ax Thaler, und y Scheffel zu b Thaler kosten by Thaler, d Scheffel zu c Thaler müssen cd Thaler kosten. Die Vermischung soll aber so geschehen, daß der Preis der x und y Scheffel die cd Thaler ausmache. Also ist.

$$ax+by=cd \quad \text{(B}$$

Man hat also für zwei unbekannte Größen zwei Gleichungen gefunden. Man multiplizire die erste Gleichung mit a und subtrahire sie von der zweiten

$$\begin{array}{rl} & ax+by=cd \\ \text{subtr.} & ax+ay=a \\ \hline & (b-a)y=(c-a)d \end{array}$$

$$y=\frac{c-a}{b-a}d \quad \text{(C}$$

Man

Man multiplizire die Gleichung A mit b, und subtrahire die Gleichung B.

$$\begin{array}{rl} bx+by = bd & \\ ax+by = cd & \\ \hline (b-a)x & = (b-c)d \\ x & = \frac{b-c}{b-a}d \quad \text{(D} \end{array}$$

Es sei nun die Quantität d des vermischten $= 1$, so wird

$$y = \frac{c-a}{b-a} \text{ aus der Gleichung C}$$

$$x = \frac{b-c}{b-a} \text{ aus der Gleichung D.}$$

Nun suche man x und y nach der vorgeschriebenen Misch-Rechnung

$$\begin{array}{c|c|c} a & b-c & \frac{b-c}{b-a} = x \\ \hline b & c-a & \frac{c-a}{b-a} = y \\ & \frac{}{b-a} & \end{array}$$

Man siehet hieraus, daß die vorgeschriebene Regel, die nämlichen Werthe von x und y heraus bringet, und daß sie folglich ihre Richtigkeit hat. Es bleibet nun noch übrig zu beweisen, daß, wie im vierten Beispiele geschehen ist, die drei gegebenen Werthe mit einer nämlichen Zahl multiplizirt werden können, ohne daß dadurch das Verhältniß der Vermischung gestöret werde. Man multiplizire a, b und c mit m, und mache dann die Mischung.

$$\begin{array}{c|c|l} & am & bm - cm \\ cm & & \\ & bm & \dfrac{cm - am}{bm - am} \end{array} \quad \begin{array}{l} \dfrac{bm - cm}{bm - am} = \dfrac{b - c}{b - a} = x \\ \\ \dfrac{cm - am}{bm - am} = \dfrac{c - a}{b - a} = y \end{array}$$

Aus dieser Rechnung siehet man, daß x und y den nämlichen Werth behalten, wenn a, b und c mit m das ist, womit man will, multipliziret werden.

§. 9.

Wenn mehr als zweierlei Dinge zu vermischen sind, so wird die Vermischung meistens unbestimmt. In diesem Falle schreibe man alle gegebene Werthe der Ordnung nach unter einander, vom kleinsten bis zum größten, oder vom größten bis zum kleinsten. Man merke, zwischen welchen zwei Werthen der gemeine Werth fällt, und schreibe ihn linker Hand neben den gefundenen Zwischenraum. Nun mische man nach Anleitung des vorigen Paragraghs, und in welcher Ordnung man will, allemal einen Werth der kleiner ist als der gemeinschaftliche, mit einem der größer ist als der gemeinschaftliche. Es schadet nicht, wenn man auch den nämlichen gegebenen Werth mehr als einmal mit einem andern mischet. Wenn dieses geschiehet, so muß man das zweite mal den gefundenen Unterschied mit dem Addizionszeichen neben den vorigen schreiben, und eben so das dritte mal, u. s. f. Man addire zuletzt alle Unterschiede. Wan theile jeden Unterschied durch die Summe aller Unterschiede, so hat man die Verhältnisse, wornach die Mischung geschehen soll.

Beispiel I. Man hat verschiedene Weine, zu 4 Groschen das Maß, zu 8 Groschen, zu 16 Groschen, und zu 17 Groschen. Wie kann man diese Weine mischen, daß das Maß 15 Groschen koste?

	4	1	$\frac{1}{21}$				
	8	2	$\frac{2}{21}$				
15	16	11	$\frac{11}{21}$	15			
	17	7	$\frac{7}{21}$				
		21					

oder

4	2	$\frac{2}{21}$	
8	1	$\frac{1}{21}$	
16	7	$\frac{7}{21}$	15
17	11	$\frac{11}{21}$	
	21		

In der ersten Rechnung ist erstlich 4 mit 16 gemischet worden, und hernach 8 mit 17. In der zweiten ist 4 mit 17, und 8 mit 16 gemischet worden, woraus eine andere Vermischung entstanden ist.

Beispiel II. 8löthiges, 9löthiges, 11löthiges, 12löthiges und 15löthiges Silber soll gemischet werden, so daß es 14löthig werde.

	8	1	$\frac{1}{20}$
	9	1	$\frac{1}{20}$
	11	1	$\frac{1}{20}$
	12	1	$\frac{1}{20}$
14	15	$6+5+3+2=16$	$\frac{16}{20}$
		20	

Weil hier nur ein größerer Werth als der gemeinschaftliche ist, somusten alle mit diesem einzigen gemischet werden.

Beispiel III. Dreierlei Getreide, der Scheffel zu $\frac{3}{4}$ Thaler, zu $1\frac{1}{2}$ Thaler, und zu $1\frac{2}{3}$ Thaler, sollen so vermischet werden, daß der Scheffel 1 Thaler zu stehen komme.

	$\frac{3}{4}$, 9	$6+8=14$	$\frac{14}{20}$
x, 12			
	$x\frac{1}{2}$, 18	3	$\frac{3}{20}$
	$x\frac{2}{3}$, 20	3	$\frac{3}{20}$
		20	

Hier sind die Brüche weggeschaffet worden, indem man die Werthe alle mit dem gemeinschaftlichen Nenner 12 multiplizirt hat.

Beweis.

Beweis. Laßet uns die Beispiele vornehmen. Wir haben in der ersten Auflösung 4 mit 16 verbunden und die Unterschiede gegen den gemeinen Preis waren 1 und 11, woraus man siehet, daß wenn man 1 Maß zu 4 Groschen und 11 Maß zu 16 Groschen zusammengießt, diese 12 Maß einen Wein zu 15 Groschen das Maß abgeben. Hernach haben wir 8 mit 17 verbunden, und gefunden, daß 2 Maß zu 8 Groschen und 7 Maß zu 17 Groschen, 9 Maß, das Maß zu 15 Groschen abgeben. Nimmt man nun die vorigen 12 Maß zu 15 Groschen und die letzten 9 Maß zu 15 Groschen zusammen, so bekommt man 21 Maß, das Maß zu 15 Groschen. Diese 21 Maß bestehen also aus 1 Maß zu 4 Groschen, 11 Maß zu 16 Groschen, 2 Maß zu 8 Groschen, und 7 Maß zu 17 Groschen. Will man nun anstatt 21 nur 1 Maß haben, so muß man von jeder Sorte nur den 21ten Theil nehmen, das ist, $\frac{1}{21}$ zu 4 Groschen, $\frac{11}{21}$ zu 16, $\frac{2}{21}$ zu 8, $\frac{7}{21}$ zu 17 Groschen.

In der zweiten Auflösung des ersten Beispieles fand man erstlich, daß 2 Maß zu 4 Groschen und 11 Maß zu 17 Groschen, $2+11$ Maß ausmachen, deren gemeinschaftlicher Werth 15 Groschen ist. Ferner fand man, daß 1 Maß zu 8 Groschen und 7 Maß zu 16 Groschen, $1+7$ Maß zu 15 Groschen das Maß ausmachen. Nimmt man beide schon gemischte Sorten zusammen, so bekommt man $2+11+1+7=21$ Maß, das Maß zu 15 Groschen, worinn 2 Maß zu 4 Groschen, 11 Maß zu 17 Groschen 1 Maß zu 8 Groschen, und 7 Maß zu 16 Groschen enthalten sind. Will man nur 1 Maß vom Gemischten haben, so wird, wie vorher von jeder Art nur der 21ste Theil genommen.

Im zweiten Beispiele fand man, daß 1 Mark zu 8 Loth rein Silber, und 6 Mark zu 15 Loth, $1+6$ Mark zu 14 Loth machen; ferner, daß 1 Mark zu 9 Loth und 5 Mark zu 15 Loth, $1+5$ Mark zu 14 Loth machen; weiter, daß 1 Mark zu 11 Loth, und 3 Mark zu 15 Loth, $1+3$ Mark zu

14 Loth

14 Loth ausmachen; endlich daß 1 Mark zu 12 Loth und und 2 Mark zu 15 Loth, 1 + 2 Mark zu 14 Loth machen. Nimmt man alles zusammen, so bekommt man 20 Mark, die Mark zu 14 Loth, worunter 1 Mark von jeder der 4 ersten Sorten und 16 Mark von der letzten Sorte sind. Will man anstatt 20 Mark nur 1 Mark haben, so nimmt man von jeder der vier ersten Sorten $\frac{1}{20}$, und von der letzten Sorte $\frac{16}{20}$ oder $\frac{4}{5}$.

Im dritten Beispiele ist weiter nichts anzumerken, als die Wegschaffung der Brüche. Um diese zu erhalten, hat man alle Preise mit 12 multiplizirt, und man darf sich nur die Einheit, deren Preise angegeben werden, 12 mal größer vorstellen. Z. B. Wenn das Kornmaß, wovon hier die Rede ist, ein Scheffel ist, so nehme man an dessen Stelle einen Malter der 12 Scheffel enthält. So werden die Preise alle 12 mal größer und die Brüche fallen weg. Man findet alsdann, daß zu 20 Maltern 14 Malter von der geringsten Sorte, 3 von der anderen, und 3 von der besten genommen werden müssen. Folglich auch zu 20 Scheffel, 14 Scheffel zu $\frac{3}{4}$ Thaler, 3 zu $1\frac{1}{2}$ Thaler, und 3 zu $1\frac{3}{4}$ Thaler. Folglich zu 1 Scheffel $\frac{14}{20}$, $\frac{3}{20}$ und $\frac{3}{20}$.

§. 10.

Die Cöci-Rechnung oder blinde Rechnung, lehret, wie man Dinge von verschiedenem Werthe vermischen soll, so daß eine gewisse Anzahl der gegebenen Dinge von allen Sorten einen gewissen Werth bekomme, und daß bei der Vermischung keine Brüche, sondern lauter ganze Zahlen entstehen. Dieser letzte Umstand unterscheidet hauptsächlich diese Rechnung von der vorhergehenden Misch-Rechnung. Sonst können die meisten hierhier gehörenden Aufgaben sowohl durch die eine, als durch die andere Rechnungsart aufgelöset werden.

Das Verfahren bei der Cöci-Rechnung ist folgendes. Man schreibe die Werthe der Dinge, welche vermischet werden sollen, vom größten bis zum kleinesten unter einander.

Linker Hand, mit dem kleinesten Werthe in einer Linie, schreibe man die Anzahl der Dinge, welche aus der Vermischung entstehen soll. Rechter Hand in der nämlichen Linie, setze man den ganzen Werth, welchen die vermischten Dinge zusammen haben sollen. Man vergleiche den kleinsten Werth mit den übrigen, und setze den Unterschied jedesmal neben die größere Zahl. Man multiplizire den kleinesten Werth mit der ganzen Anzahl der Dinge. Das Produkt subtrahire man von dem ganzen Werthe der zur Rechten stehet. Was übrig bleibet, suche man so einzutheilen, daß die Theile lauter Vielfache der Unterschiede seien. Die Multiplikatoren müssen aber zusammen weniger ausmachen, als die ganze Anzahl der Dinge. Diese Multiplikatoren geben die Anzahl der Dinge jeder Art vom grösseren Werthe. Ziehet man ihre Summe von der ganzen Anzahl der Dinge ab, so giebt der Rest die Anzahl der Dinge vom geringsten Werthe.

Beispiel I. Es sollen Ochsen, das Stück zu 10 Thaler, Schweine, das Stück zu 4 Thaler, und Schafe, das Stück zu 2 Thaler, so eingekaufet werden, daß 100 Stück Vieh, 540 Thaler zu stehen kommen. Wie viel muß man von jeder Art nehmen?

	10 | 8	
	4 | 2	
100	2	540
		abgezog. 200 = 100 × 2
		340

$$340 = 8 \times 24 + 2 \times 74$$
$$= 8 \times 25 + 2 \times 70$$
$$= 8 \times 26 + 2 \times 66$$
$$= 8 \times 27 + 2 \times 62$$
$$= 8 \times 28 + 2 \times 58$$
$$= 8 \times 29 + 2 \times 54$$
$$= 8 \times 30 + 2 \times 50$$
$$= 8 \times 31 + 2 \times 46$$
$$= 8 \times 32$$

8 × 32 + 2 × 42
8 × 33 + 2 × 38
8 × 34 + 2 × 34
8 × 35 + 2 × 30
8 × 36 + 2 × 26
8 × 37 + 2 × 22
8 × 38 + 2 × 18
8 × 39 + 2 × 14
8 × 40 + 2 × 10
8 × 41 + 2 × 6
8 × 42 + 2 × 2

Hier müssen 340 in zwei Theile getheilet werden, so daß der eine ein Vielfaches von 8 und der andere ein Vielfaches von 2 sei, und daß beide Multiplikatoren zusammen weniger als 100 ausmachen. Versuchet man den Unterschied 8 weniger als 24 mal zu nehmen, z. B. 20 mal, so machet 2 × 20, 160, folglich fehlen noch 180 zu den 340, diese 180 machen 2 × 90. Aber die Multiplikatoren 20 und 90 machen 110, also mehr als 100, und folglich können sie nicht gebrauchet werden. Ueber 24 können hier alle folgenden Zahlen bis 42 gebrauchet werden. Ueber 42 kann man nicht gehen, sonst bleibet kein Multiplum von 2 übrig.

Die Multiplikatoren von 8 zeigen hier die Anzahl der Ochsen an, und die Multiplikatores von 2 bedeuten die Anzahl der Schweine. Wenn man die Summe beider Zahlen von 100 subtrahiret, so bekommt man die Anzahl der Schafe. Z. B. Die erste Eintheilung von 340 gab 8 × 24 + 2 × 74. Man muß also nehmen 24 Ochsen und 74 Schweine, zusammen 98 Stück Vieh, und die 2 die an 100 fehlen, müssen Schafe sein.

Man siehet also, daß 19 Auflösungen der gegebenen Frage möglich sind. Wir wollen nur die Probe der drei ersten hierher setzen.

24 Ochsen	zu 10 Thaler,	machen	240 Thaler
74 Schweine	zu 4 ; ; ; ;		296 ; ;
2 Schafe	zu 2 ; ; ; ;		4 ; ;
100 Stück Vieh			540 Thaler.

25 Ochsen,	zu 10 Thaler,	machen	250 Thaler
70 Schweine	zu 4 ; ; ; ;		280 ; ;
5 Schafe	zu 2 ; ; ; ;		10 ; ;
100 Stück Vieh			540 Thaler.

26 Ochsen,	zu 10 Thaler,	machen	260 Thaler
66 Schweine	zu 4 ; ; ; ;		264 ; ;
8 Schafe	zu 2 ; ; ; ;		16 ; ;
100 Stück Vieh			540 Thaler.

und so kann man die Richtigkeit aller übrigen Auflösungen untersuchen.

Um sich bei diesem und ähnlichen Fällen das überflüßige Versuchen zu ersparen, kann man sogleich die Grenzen bestimmen, welche die Faktoren nicht überschreiten müssen. Es sei der Faktor, womit 8 multiplizirt wird $= x$, der andere, womit 2 multiplizirt wird, sei y, so muß erstlich $x + y$ kleiner sein, als 100, oder

$$x + y < 100 \quad (A$$

Hernach sollen $8x + 2y$ zusammen allemal 340 ausmachen, also

$$8x + 2y = 340 \quad (B$$

Man multiplizire die Ungleichung A mit 8 und subtrahire die Gleichung B,

$$\begin{array}{rl} & 8x + 8y < 800 \\ \text{subtr.} & 8x + 2y = 340 \\ \hline & 6y < 460 \\ & y < 76\frac{2}{3} \quad (C \end{array}$$

Ferner

Ferner multiplizire man die Ungleichung A mit 2, und subtrahire sie von der Gleichung B

$$\begin{array}{r} 8x+2y=340 \\ 2x+2y<200 \\ \hline 6x \ldots > 140 \end{array}$$ (II Hauptst. §. 25)

$$x > 23\tfrac{1}{3}$$ (D

Also siehet man aus den Ungleichungen D und C sogleich, daß x größer als $23\frac{1}{3}$, also in ganzen Zahlen wenigstens $= 24$ angenommen werden muß, und daß y unter $76\frac{2}{3}$ versuchet werden muß, wenn man nämlich y eher als x suchen wollte: denn sonst bestimmet sich y von selbst, so bald man x bestimmet hat.

Beispiel II. In einem Gasthause haben 13 Personen, Männer, Frauen und Jungfern 4 Thaler 22 Groschen, oder 118 Groschen verzehret; jeder Mann 16 Groschen, jede Frau 10 Groschen, jede Jungfer 5 Groschen. Wie viel waren Männer, wie viel Frauen, wie viel Jungfern? Das verzehrte Geld ist hier als der Werth oder Preis eines jeden anzusehen.

$$\begin{array}{rrr} & 16 & 11 \\ & 10 & 5 \\ 13 & 5 & \end{array}$$

$$118$$
$$65 = 5 \times 13$$
$$53$$
$$53 = 11 \times 3 + 5 \times 4.$$

Wenn man hier versuchet, den Unterschied 11, einmal, 2mal oder 4mal zu nehmen, und das Produkt von 53 abziehet; so siehet man, daß das übrige kein Multiplum von 5 sein kann. Nur der Multiplikator 3 allein kann hier zur Vervielfältigung der 11 gebrauchet werden, und dann machet das übrige 4 mal 5. Daraus muß man schließen, daß 3 Männer, und 4 Weiber im Gasthause gewesen, und folglich 6 Jungfern.

3 Männer zu	16	Gr.	machen	48 Gr.
4 Weiber zu	10	″	″	40 ″
6 Jungfern zu	5	″	″	30 ″
13 Personen.				118 Groschen.

Beispiel III. 14 Personen speisen zusammen, und verzehren, ein Mann 20 Groschen, ein Weib 15 Groschen, eine Jungfer 10 Groschen, ein Kind 5 Groschen, zusammen 180 Groschen, oder 7 Thaler 12 Groschen. Wie viel waren von jeder Art Personen?

	20	15
	15	10
	10	5
14	5	

180

so ist $70 = 5 \times 14$

110

$$110 = 15 \times 1 + 10 \times 9 + 5 \times 1$$
$$= 15 \times 2 + 10 \times 7 + 5 \times 2$$
$$= 15 \times 3 + 10 \times 6 + 5 \times 1$$

u. s. f.

Es laßen sich hier sehr viel verschiedene Abwechslungen machen. Die ersten Eintheilungen geben folgende Auflösungen:

	1 Mann zu	20	Gr., machet	20 Groschen
	9 Weiber zu	15	″ ″	135 ″ ″
	1 Jungfer zu	10	″ ″	10 ″ ″
folglich	3 Kinder zu	5	″ ″	15 ″ ″
	14 Personen.			180 Groschen.

	2 Männer zu	20	Gr., machen	40 Groschen
	7 Weiber zu	15	″ ″	105 ″ ″
	2 Jungfern zu	10	″ ″	20 ″ ″
folglich	3 Kinder zu	5	″ ″	15 ″ ″
	14 Personen.			180 Groschen.

3 Män-

	3 Männer zu 20 Gr.,	machen	60 Groschen
	6 Weiber zu 15 ; ; ;		90 ; ;
	1 Jungfer zu 10 ; ; ;		10 ; ;
folglich	4 Kinder zu 5 ; ; ;		20 ; ;
	14 Personen.		180 Groschen.

Beispiel IV. Ein Student hat 18 Bücher für 25 Thaler gekaufet, nämlich einige in Folio, zu $2\frac{1}{3}$ Thaler das Stück, einige in Quarto zu $1\frac{3}{4}$ Thaler, einige in Oktavo zu $\frac{1}{2}$ Thaler; wie viel waren von jedem Formate? Hier muß man, um die Brüche wegzuschaffen, sowohl den Werth jeder Art, als auch den ganzen Werth, mit dem gemeinschaftlichen Nenner 12 multipliziren.

$2\frac{1}{3}$ | 28 | 22
$1\frac{3}{4}$ | 21 | 15
$\frac{1}{2}$ | 6 |

18

$\frac{25}{300}$ mult. 12

subtr. 1.0.8 $= 6 \times 18$

192

$192 = 22 \times 6 + 15 \times 4.$

Keine andere Eintheilung kann hier statt finden. Jedes andere Multiplum von 22 außer 22×6, wenn es von 192 abgezogen wird, läßt kein Multiplum von 5 übrig. Also:

	6 in Folio zu $2\frac{1}{3}$ Thaler,	machen	14 Thaler.
	4 in Quarto zu $1\frac{3}{4}$; ; ; ;		7 ; ;
folglich	8 in Oktavo zu $\frac{1}{2}$; ; ; ;		4 ; ;
	18 Bücher.		25 Thaler.

Beweis. Wir wollen, zum Beweise das erste Beispiel erklären. Gesetzet man habe anfänglich lauter Schafe gekaufet. Da also 100 Stück gekaufet worden, und das Stück 2 Thaler kostet, so hat man ausgegeben

100 X 2 Thaler. Man hat aber 540 Thaler Geld, die Hundert Stück Vieh einzukaufen. Es bleiben also 340 Thaler übrig. Für diese 340 Thaler kann ich nun einige Ochsen und Schweine gegen eben so viel Schafe eintauschen, wenn ich nur für jeden Ochsen 8 Thaler und für jedes Schwein 2 Thaler zulege, weil ein Ochs 8 Thaler mehr, und ein Schwein 2 Thaler mehr kostet, als ein Schaf. Z. B. Man tauschet 24 Ochsen und 74 Schweine gegen 98 Schafe ein, so leget man 24 mal 8 Thaler und 74 mal 2 Thaler zu, welches zusammen die übriggebliebenen 340 Thaler ausmachet; weil man nun nichts mehr zuzusetzen hat, so behält man noch 2 Schafe. Für die übriggebliebenen 340 Thaler kann man auch 25 Ochsen und 70 Schafe, oder 26 Ochsen und 66 Schafe, u. s. f. eintauschen u. s. f.

Was die Wegschaffung der Brüche betrift, so wollen wir dieselbe nach Anleitung des 4ten Exempels erklären. Gesetzt, die Bücher kosteten jedes 12mal mehr als es wirklich gekostet hat, so würden auch alle 18 Bücher 12mal mehr kosten als 25 Thaler; übrigens würde dadurch in der Menge der Bücher jeder Art nichts geändert werden. Man kann also, um der Bequemlichkeit der Rechnung willen, sowohl den Werth jedes Dinges, als auch den ganzen Werth aller Dinge, mit einem und demselben Multiplikator multipliziren.

§. 11.

Alle hierher gehörende Fragen können sowohl durch die Misch-Rechnung, als durch die Blinde-Rechnung aufgelöset werden.

Beispiel I. 10löthiges und 14 löthiges Silber soll so gemischet werden, daß es 11löthig werde. Die Auflösung durch die Misch-Rechnung ist folgende:

	14	1	$\frac{1}{4}$
11			
	10	3	$\frac{3}{4}$
		4	

Also

Also muß auf eine jede Menge $\frac{1}{4}$ vom 14löthigen und $\frac{3}{4}$ vom 10löthigen Silber genommen werden. Will man das nämliche Exempel nach der Blinden-Rechnung auflösen, so sage man 1 Mark vermischten Silbers, zu 10 Loth und zu 14 Loth rein Silber, soll enthalten 11 Loth rein Silber, wie viel muß von jeder Art genommen werden?

	14	4	
1	10		11

abgezog. $10 = 10 \times 1$

div. 4) $\frac{1}{1}$

$\frac{1}{4}$ zu 14 Loth rein.

folgl. $\frac{3}{4}$ zu 10 Loth rein.

Beispiel II. Man will Wein mischen, zu 18 und zu 13 Groschen das Maß, so daß 100 Maß 1500 Groschen oder 62 Thaler 12 Groschen zu stehen kommen. Da 100 Maß 1500 Groschen zu stehen kommen, so muß 1 Maß des gemischten 15 Groschen kosten. Also, nach der Misch-Rechnung,

	18	2	$\frac{2}{5}$
15			
	13	3	$\frac{3}{5}$
		5	

Es müssen also $\frac{2}{5}$ von 100 Maß, das ist 40 Maß zu 18 Groschen, und $\frac{3}{5}$ von 100 Maß, das ist, 60 Maß zu 13 Groschen zusammengenommen werden. Nach der Blinden-Rechnung ist das Verfahren folgendes:

	18	5	
100	13		1500

subtr. $1300 = 100 \times 13$

div. 5) 200

40 Maß zu 18 Gr.

folgl. 60 Maß zu 13 Gr.

Weil in diesen beiden Beispielen nur zwei Sachen zu vermischen sind, so ist auch jedesmal nur eine Auflösung möglich. Nachdem man also in der blinden Rechnung, wie gewöhnlich das Abziehen verrichtet hat, so muß der Rest nothwendig ein Vielfaches des einzigen Unterschiedes sein, welcher vorhanden ist. Um aber zu finden, welches Vielfache er ist, so darf man nur den Rest durch den Unterschied dividiren. Der Quozient zeiget an, womit der Unterschied multipliziret werden müsse, damit er dem Reste gleich werde, und der gefundene Mulplikator ist die Anzahl der Dinge von der kostbareren Art, die man in der Vermischung gebrauchen soll.

Beispiel III. Es sollen dreierlei Arten Gewürz so mit einander gemischet werden, daß das Pfund 12 Groschen koste. Es kostet aber das Pfund von der einen Art 18 Groschen von der anderen 16 Groschen, und von der dritten Art 6 Groschen.

				oder
	18	6	$\frac{6}{22}$	$\frac{3}{11}$
	16	6	$\frac{6}{22}$	$\frac{3}{11}$
12	6	4 + 6 = 10	$\frac{10}{22}$	$\frac{5}{11}$
		22		

Die Misch-Rechnung giebt hier nur eine Antwort auf die Frage. Laßt uns das nämliche Beispiel nach der blinden Rechnung versuchen.

	18	12	
	16	10	
1 Pf. zu	6		soll kosten 12
			subtr. 6 = 6 × 1
			Rest 6

Hier soll der Rest 6 so eingetheilet werden, daß der eine Theil ein Multiplum von 12 und der andere ein Multiplum von 10 sei; welches auch möglich ist, da man bei der Vermischung

schung des Gewürzes gar wohl Brüche annehmen kann. Es sei also die Menge des besten Gewürzes $= x$, und die Menge des andern zu 16 Groschen $= y$, so muß sein

$$12x + 10y = 6$$
$$10y = 6 - 12x$$
$$y = \tfrac{6}{10} - \tfrac{12x}{10}$$

Wenn also y bejahet werden soll, so muß angenommen werden

$$\tfrac{6}{10} > \tfrac{12x}{10}$$
$$6 > 12x$$
$$\tfrac{6}{12} > x$$
$$\tfrac{1}{2} > x$$

Folglich muß x unter $\frac{1}{2}$ angenommen werden. Es sei $x = \frac{1}{3}$, so ist $12x = 4$, also bleiben noch 2 vom Reste 6 übrig. Diese 2, durch den andern Unterschied 10 getheilet, geben $\frac{1}{5}$. Also ist

$$6 = 12 \times \tfrac{1}{3} + 10 \times \tfrac{1}{5} \quad (A$$

Nimmt man an, es sei $x = \frac{1}{4}$, so ist $12x = 3$, und vom Reste 6 bleiben noch 3. Diese, durch 10 getheilet, geben $\frac{3}{10}$. Also ist auch

$$6 = 12 \times \tfrac{1}{4} + 10 \times \tfrac{3}{10} \quad (B$$

Nimmt man an es sei $x = \frac{1}{5}$, so ist $12x = \frac{12}{5}$; dieses von 6 subtrahiret, giebt $\frac{18}{5}$ zum Reste; wenn man nun durch 10 theilet, so kommt $\frac{18}{50} = \frac{9}{25}$, es ist also

$$6 = 12 \times \tfrac{1}{5} + 10 \times \tfrac{9}{25} \quad (C.$$

Und so kann man andere Eintheilungen machen, so lange x und y zusammen weniger als 1 ausmachen. Wenn man nun die in den Gleichungen A, B und C angenommenen Werthe von x und y addiret, und von 1 subtrahiret, so bekommt man die Menge, die vom dritten oder schlechtesten Gewürze genommen werden soll, und die Mischung kann folgendermaßen geschehen:

$\frac{1}{3}$ zu

$\frac{1}{3}$	zu 18 Groschen,	machet 6	Groschen.
$\frac{1}{5}$	zu 16 Groschen,	: : $3\frac{1}{5}$	: :
$\frac{7}{15}$	zu 6 Groschen,	: : $2\frac{4}{5}$	: :
1 Pfund			12 Groschen.

$\frac{1}{4}$	zu 18 Groschen,	machet $4\frac{1}{2}$	Groschen.
$\frac{3}{10}$	zu 16 Groschen,	: : $4\frac{4}{5}$	: :
$\frac{9}{20}$	zu 6 Groschen,	: : $2\frac{7}{10}$	: :
1 Pfund			12 Groschen.

$\frac{1}{5}$	zu 18 Groschen,	machet $3\frac{3}{5}$	Groschen.
$\frac{9}{25}$	zu 16 Groschen,	: : $5\frac{18}{25}$	: :
$\frac{11}{25}$	zu 6 Groschen,	: : $2\frac{16}{25}$	: :
1 Pfund			12 Groschen.

Zwischen den angenommenen Werthen für x können noch unendlich viel andere eingeschaltet werden, wozu sich ebenfalls der gehörige Werth für y finden wird. Z. B. Zwischen $x = \frac{1}{3}$ und $x = \frac{1}{4}$ kann noch angenommen werden: $x = \frac{31}{96}$, $\frac{30}{96}$, $\frac{29}{96}$, $\frac{28}{96}$, $\frac{27}{96}$, $\frac{26}{96}$, $\frac{25}{96}$, und zwischen diesen Werthen von x können wiederum soviel eingeschaltet werden als man will. Es ist also die Anzahl der Auflösungen in der That unendlich, obgleich die Misch-Rechnung nur eine einzige angiebet.

Beispiel IV. 11 Gäste haben 99 Groschen verzehret, jeder Mann 12 Groschen, jede Frau 8 Groschen und jede Jungfer 5 Groschen. Wie viel waren von jeder Art zugegen? Will man die Misch-Rechnung gebrauchen, so kommt auf jede Person, eins ins andere gerechnet, $\frac{99}{11} = 9$ Groschen, als der Werth des Vermischten.

	12	1 + 4	$\frac{5}{11}$
9			
	8	3	$\frac{3}{11}$
	5	3	$\frac{3}{11}$
		11	

Es waren also von der ganzen Gesellschaft $\frac{5}{11}$ Männer, $\frac{3}{11}$ Frauen, und $\frac{3}{11}$ Jungfern, das ist, 5 Männer, 3 Frauen und 3 Jungfern. Laßt uns jezt nach der blinden Rechnung verfahren.

	12	7
	8	3
11	5	99
		subtr. 55 = 11 × 5
		44

$$44 = 7 \times 5 + 3 \times 3$$

Weil hier ganze Zahlen erfordert werden, so kommt nur eine Auflösung heraus, nämlich 5 Männer und 3 Weiber, folglich 3 Jungfern.

Anmerkung. Man siehet aus den vier vorhergehenden Beispielen, daß die Misch-Rechnung den Vortheil hat, daß dabei kein Versuchen Statt findet, sondern die Antwort gerades Weges gefunden wird. Anderseits aber, giebet sie bei unbestimmten Aufgaben bei weiten nicht alle mögliche Antworten, welche man durch die blinde Rechnung erhalten kann. Uebrigens sind diese beiden Rechnungsarten, seitdem die Algebra häufiger gebrauchet wird, beinahe in Vergessenheit gerathen. Sie haben aber doch ihren Nutzen, und sind keines Weges zu verachten; indem man, vermittelst derselben, manche Aufgabe weit geschwinder auflösen kann, als wenn man erst algebraische Gleichungen aufsetzen wollte.

Dreizehntes Hauptstück.

Von den Funkzionen.

§. 1.

Eine Funkzion zweier oder mehrerer Größen, oder ein Erzeugniß derselben, ist eine Größe, welche aus der Verbindung derselben, vermittelst der verschiedenen einfachen Rechnungsarten, entstehet.

Also sind die Summe, das Produkt, der Quozient, die Potenzen oder Wurzeln, die Logarithmen einiger gegebenen Größen, lauter Funkzionen derselben.

Z. B. $a \pm b$, ab, $\frac{a}{b}$, a^b, $\sqrt[b]{a}$, $\frac{a}{b}$, sind Funkzionen von a und b.

Und weil jede zusammengesetzte Größe als die Summe oder der Unterschied ihrer Glieder angesehen werden kann, so ist jede zusammengesetzte Größe eine Funkzion nicht nur ihrer Glieder sondern auch der einzelnen Größen aus denen die Glieder entstanden sind. Z. B. $abc \pm \sqrt[b]{\frac{a}{c}} \pm \frac{a+c}{b}$ ist eine Funkzion von a, b und c.

§. 2.

Wenn in einer Funkzion eine Größe oder mehrere Größen zunehmen oder abnehmen, so ist es natürlich daß der Werth der ganzen Funkzion entweder größer oder kleiner werde. Dieses haben wir schon bei jeder Rechnungsart insbesondere gesehen. Wir haben auch bestimmet, um wie viel die Summe oder der Rest, oder das Produkt, oder der Quozient, oder die Potenz größer oder kleiner

ner werden, wenn die gegebenen Größen zunehmen oder abnehmen. Diese wichtige Lehre von der Abnahme und Zunahme der Funkzionen, werden wir bald genauer und im Allgemeinen abhandeln. Vorher aber wollen wir noch die Beschaffenheit der Funkzionen und ihre Verwandlungen betrachten.

§. 3.

Eine veränderliche Größe (quantité variable) ist diejenige, welche man sich vornimmt in einer Funkzion zu vergrößern oder zu verkleinern, um zu erfahren, welcher Unterschied dadurch in der Funkzion selbst entstehen wird. Diejenigen Größen, welchen man ihren Werth laßen will, ohne ihn zu vergrößern oder zu verkleinern, heißen beständige Größen (quantités constantes).

Z. B. Ich will erfahren, um wie viel das Produkt ab zunimmt, wenn der Faktor b allein um c größer wird. So ist hier a eine beständige, und b eine veränderliche Größe. Gesetzet b nehme um c zu, so habe ich anstatt ab, $a(b+c) = ab + ac$. Will ich aber im Produkte ab, sowohl a als b vergrößern, so sind a und b als veränderliche Größen anzusehen. Gesetzet also, a werde größer um d, und b werde größer um c, so bekomme ich $(a+d)(b+c) = ab + bd + ac + cd$, woraus ich sehe, daß das Produkt um $bd + ac + cd$ größer geworden ist.

§. 4.

Um die veränderlichen Größen von den beständigen besser zu unterscheiden, und um sich zu erinnern, welche Größen verändert werden, und welche man unverändert läßt, pfleget man die veränderlichen mit z, y, x, u. s. f., wie die unbekannten Größen, zu bezeichnen. Die beständigen werden mit a, b, c, und s. f. bemerket.

Will ich also die Veränderung des Produktes ab erfahren, wenn b allein geändert wird, so schreibe ich anstatt ab bequemer ax oder ay, u. s. f. Will ich beide Faktoren verändern, so schreibe ich xy, oder yz, u. s. f.

§. 5.

§. 5.

Um kürzer zu reden, benennet man oft nur die veränderlichen Größen in einer Funkzion. Z. B. Anstatt zu sagen $(ax+cy)^m$ ist eine Funkzion von x, y, a, c und m, saget man bloß $(ax+cy)^m$ ist eine Funkzion von x und y, weil die Größen a, c und m, welche unverändert bleiben sollen, weniger in Betrachtung kommen.

§. 6.

Eine razionale oder schlichte Funkzion ist diejenige, wo die veränderlichen Größen keine Wurzelzeichen oder gebrochene Exponenten bei sich haben. Eine irrazionale oder unschlichte Funkzion ist diejenige, wo die veränderlichen Größen unter dem Wurzelzeichen stehen, oder gebrochene Exponenten haben. Z. B. $\sqrt{(a^2-x^2)}$ oder $(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$ ist eine irrazionale Funkzion von x. Hingegen ist $x\sqrt{(a^2-b^2)}$ eine razionale Funkzion von x.

§. 7.

Eine ganze Funkzion ist diejenige, wo keine veränderliche Größen als Nenner oder Theiler vorkommen. Eine gebrochene Funkzion hingegen ist diejenige, wo Brüche vorkommen, die im Nenner veränderliche Größen haben. Z. B.

$$axy \pm \frac{x^2}{b} \pm \frac{y^2}{c} \text{ oder } axy \pm \frac{1}{b}x^2 \pm \frac{1}{c}y^2$$

ist eine ganze Funkzion von x. Aber

$$xy \pm \frac{a-b}{x-y} \pm \frac{c}{x^2}$$

ist eine gebrochene Funkzion von x und y.

§. 8.

Eine homogene oder gleichartige Funkzion ist eine jede, wo alle Glieder gleich viel veränderliche Ausmessungen oder Faktoren haben. Eine heterogene oder ungleich-

gleichartige Funkzion ist diejenige, wo nicht alle Glieder gleich viel veränderliche Ausmessungen haben. Z. B.

$$ax^2y \pm bxy^2 \pm cx^3 \pm dy^3$$

ist eine gleichartige Funkzion von x und y, weil in jedem Gliede drei veränderliche Faktoren enthalten sind, welches am deutlichsten wird, wenn man die Potenzen ohne Exponenten schreibet, nämlich

$$axxy \pm bxyy \pm cxxx \pm dyyy$$

oder noch deutlicher, wenn man den veränderlichen Größen einen und denselbigen Namen giebet, in welchem Falle in allen Gliedern die nämliche Potenz der unbekannten Größe entstehet. Z. B. Man schreibe z anstatt x und y, so bekommt man

$$az^3 \pm bz^3 \pm cz^3 \pm dz^3$$

Folgende Funkzion ist ungleichartig:

$$ax^2 \pm bxyz \pm cz^4$$

Denn wenn man v anstatt x, y und z schreibet, so bekommt man

$$av^2 \pm bv^3 \pm cv^4$$

wo die veränderlichen Potenzen und folglich die veränderlichen Ausmessungen ungleich sind.

§. 9.

Die **Ordnung** oder der **Grad** einer Funkzion, wird nach der größten Anzahl der veränderlichen Faktoren in einem Gliede gerechnet. Z. B.

$$ax \pm bxy \pm cx^2y$$

ist eine ungleichartige Funkzion der Größen x und y vom dritten Grade oder von der dritten Ordnung, weil cx^2y drei veränderliche Ausmessungen enthält. Diese Funkzion

$$axyz \pm bx^2z \pm cxz^2 \pm dxy^2$$

ist eine gleichartige Funkzion der Größen x, y und z vom 4ten Grade, weil alle Glieder drei veränderliche Ausmessungen haben.

§. 10.

Bei gebrochenen Funkzionen findet man am bequemsten den Grad derselben, wenn man alle veränderliche Größen durch den nämlichen Buchstaben andeutet, und dann den Bruch so kurz als möglich ausdrucket. Z. B. Diese Funkzion

$$\frac{axy^2 + bx^3 + cx^2y}{ax + by}$$

wird, wenn x und y durch v ausgedrucket werden,

$$\frac{av^3 + bv^3 + cv^3}{av + bv}$$

$$\text{oder } \frac{av^2 + bv^2 + cv^2}{a + b}$$

$$\text{oder } \left(\frac{a + b + c}{a + b}\right) v^2$$

Woraus man siehet, daß die gegebene Funkzion vom zweiten Grade, oder von zwei Ausmessungen ist. Folgende Funkzion

$$\frac{ay^3}{bxyz + cx^3}$$

wird, wenn x, y und z durch v ausgedrucket werden,

$$\frac{av^3}{bv^3 + cv^3}$$

$$\text{oder } \frac{a}{b + c}$$

$$\text{oder } \left(\frac{a}{b + c}\right) v^0 = 1$$

In diesem Falle ist die Funkzion von 0 Ausmessungen. Folgende Funkzion

$$\frac{ax}{bx^2y^2 + cyz^3}$$

wird, wenn x, y und z durch v ausgedrucket werden,

$$\frac{av}{bv^4 + cv^4}$$

oder $$\frac{a}{bv^3 + cv^3}$$

oder $$\left(\frac{a}{b + c}\right) v^{-3}$$

Hier ist die Funkzion von —3 Ausmessungen, das heißt, es sind im Nenner 3 veränderliche Ausmessungen mehr, als im Zähler.

§. 11.

Will man Formeln haben, welche alle mögliche ganze und razionale Funkzionen einer, zweier oder mehrerer veränderlichen Größen vorstellen; so mache man alle mögliche mittlere Verwechslungen (V. Hauptst. §. 23) der veränderlichen Größen. Vor jeder Verwechslung schreibe man einen beständigen Koeffizienten, und ganz voran setze man noch ein bloß beständiges Glied, wenn man nämlich ungleichartige Funkzionen verlanget. Soll aber die Formel gleichartig sein, so fällt das bloß beständige Glied weg, und man behält nur die Verwechslungen von gleichviel Ausmessungen.

I) Eine einzige veränderliche Größe x kann nicht anders, als mit sich selbst verbunden werden, woraus ihre auf einander folgenden Potenzen entstehen. Die allgemeine Formel für alle ungleichartige Funkzionen von x ist also

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \&c.$$

wo die Koeffizienten a, b, c, d, e, f, beständige Größen vorstellen, sie mögen übrigens bejahet oder verneinet sein.

II) Wenn man für x und y die mittleren Verwechslungen machet, so bekommt man

Einfache	x, y
Zweifache	xx, xy, yy
Dreifache	xxx, xxy, xyy, yyy
Vierfache	$xxxx, xxxy, xxyy, xyyy, yyyy.$
	&c. &c.

Hieraus siehet man, daß die Formel für alle mögliche ungleichartige Funkzionen von x und y sein wird.
$a+bx+cy+dx^2+exy+fy^2+gx^3+hx^2y+ixy^2+ky^3+$ &c.

Soll die Formel für eine Funkzion vom $n$ten Grade gelten, so muß man beim $n$ten Grade der Verwechslungen aufhören. Soll die Formel eine gleichartige Funkzion vorstellen, so muß man nur die Verwechslungen von einem einzigen Grade nehmen. Also werden alle gleichartige Funkzionen von x und y sein:

von einer Ausmessung

$$ax+by$$

von zwei Ausmessungen

$$ax^2+bxy+cy^2$$

von drei Ausmessungen

$$ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3$$

von n Ausmessungen

$$ax^n+bx^{n-1}y+cx^{n-2}y^2+dx^{n-3}y^3+ \text{ &c...} +hy^n$$

Und weil die ungleichartige Funkzion $a+bx+cy+dx^2+exy+fy^2+gx^3+$ u. s. f. alle auf einander folgende gleichartige Funkzionen von x und y in sich begreifet, so kann man jede ungleichartige Funkzion von x und y, in umgekehrter Ordnung also vorstellen:

ax

$$ax^n + bx^{n-1}y + cx^{n-2}y^2 + dx^{n-3}y^3 + \&c \ldots hy^n$$
$$+ a'x^{n-1} + b'x^{n-2}y + c'x^{n-3}y^2 + d'x^{n-4}y^3 + \&c \ldots h'y^{n-1}$$
$$+ a''x^{n-2} + b''x^{n-3}y + c''x^{n-4}y^2 + d''x^{n-5}y^3 + \&c \ldots h''y^{n-2}$$
$$+ \&c. \ \&c. \ldots\ldots\ldots + k$$

Man siehet hier, daß jede folgende Zeile eine gleichartige Funkzion von x und y vorstellet, die eine Ausmessung weniger hat als die vorige. Zuletzt kommt noch eine beständige Größe k, welche mit der Größe a in der Funkzion $a + bx + cy + dx + \&c.$ einerlei ist.

III) Für drei veränderliche Größen x, y und z, bekommt man folgende mittlere Verwechslungen:

Einfache x, y, z
Zwiefache xx, xy, xz, yy, yz, zz
Dreifache $xxx, xxy, xxz, xyy, xyz, xzz, yyy, yyz, yzz, zzz$. &c. &c.

Folglich kann eine ungleichartige Funkzion der Größen x, y und z, vom dritten Grade, also vorgestellet werden:

$$a + bx + cy + dz + ex^2 + fxy + gxz + hy^2 + iyz$$
$$+ kz^2 + lx^3 + mx^2y + nx^2z + \&c. \ \&c.$$

Man siehet, daß hier wiederum die ungleichartige Funkzion aus lauter gleichartigen bestehet. Es sind nämlich die gleichartigen Funkzionen von x, y und z, folgende:

Von einer Ausmessung

$$ax + by + cz$$

Von zwei Ausmessungen

$$ax^2 + bxy + cxz + dy^2 + eyz + fz^2$$

Von drei Ausmessungen

$$ax^3 + bx^2y + cx^2z + dxy^2 + exyz + fxz^2 + gy^3$$
$$+ hy^2z + iyz^2 + kz^3.$$

§. 12.

Man kann sich auch vorstellen, daß die Funkzionen von höheren Graden aus der Multiplikazion einfacher Funkzionen entstehen. Man multiplizire z. B. diese einfachen Funkzionen

$$a + dx$$
$$b + ex$$
$$c + fx$$

so wird entstehen:

$$abc + (bcd + ace + abf)x + (cde + bdf + aef)x^2 + defx^3$$

Dieses gefundene Produkt kann nun alle Funkzionen einer einzigen veränderlichen Größe vom dritten Grade vorstellen.

Wenn man setzet, irgend eine der einfachen Funkzionen, woraus die zusammengesetzte entstanden ist, sei $= o$, so wird die gefundene Funkzion selbst $= o$, wie schon bei der Lehre von den Gleichungen erwähnet worden (H. XI. §. 12.); und man erhält die Gleichung

$$abc + (bcd + ace + abf)x + (cde + bdf + aef)x^2 + defx^3 = o$$

oder wenn man alle Glieder durch dcf dividiret:

$$\frac{abc}{def} + \left(\frac{bc}{ef} + \frac{ac}{df} + \frac{ab}{de}\right)x + \left(\frac{c}{f} + \frac{b}{e} + \frac{a}{d}\right)x^2 + x^3 = o$$

Dieses ist eine vollständige Gleichung vom dritten Grade. Löset man sie auf, so sind deren Wurzeln enthalten in folgenden Gleichungen vom ersten Grade:

$$x + \frac{a}{d} = o \text{ oder } a + dx = o$$

$$x + \frac{b}{e} = o \text{ oder } b + ex = o$$

$$x + \frac{c}{f} = o \text{ oder } c + fx = o$$

Und

Und die ersten Hauptglieder derselben sind zugleich die Faktoren der gegebenen Funkzion. Aus dieser Bemerkung entstehet die Auflösung der folgenden Aufgabe.

§. 13.

Aufgabe.

Die Faktoren finden, woraus eine Funkzion der Größe x entstanden ist, oder entstehen kann.

Auflösung. Man setze, die ganze Funkzion sei $= 0$. Man löse die Gleichung auf. Die einfachen Gleichungen, welche die Wurzeln ausdrucken, werden zugleich mittelst ihrer ersten Hauptglieder die verlangeten Faktoren geben.

Beispiel. Man verlanget die einfachen Faktoren dieser Funkzion

$$x^3 + 4x^2 + x - 6$$

Man setze $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$

und löse die Gleichung auf. Weil hier das letzte Glied 6 durch 1, 2 und 3 gemessen wird, so versuche man, ob die Gleichung $= 0$ wird, wenn man annimmt

$$x = +1$$
$$x = +2$$
$$x = +3$$

Man wird finden, daß die Gleichung verschwindet, wenn

$x = +1$ oder $x - 1 = 0$
$x = -2$ oder $x + 1 = 0$
$x = -3$ oder $x + 3 = 0$

Folglich ist

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x-1).(x+2).(x+3)$$

§. 14.

Alle razionale und gebrochene Funkzionen von x können durch diese Formel vorgestellet werden:

$$\frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + \&c.}{a' + b'x + c'x^2 + d'x^3 + \&c.}$$

oder wenn der Nenner mehr Ausmessungen haben soll als der Zähler

$$\frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + \&c. \ldots + hx^s}{a' + b'x + c'x^2 + d'x^3 + \&c. \ldots + h'x^{s+1}}$$

Denn I) wie auch die Glieder der gebrochenen Funkzion beschaffen sein mögen, so kann man sie alle unter einen Nenner bringen. Alsdann müssen sowohl der Zähler als der Nenner ganze Funkzionen von x sein, welche diese Form haben

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \&c.$$
und $$a' + b'x + c'x^2 + d'x^3 + \&c.$$

Und wenn einige Sätze mangeln, so kann man sie vermittelst des Koeffizienten o ersetzen.

II) Wenn verneinte Exponenten im Bruche vorhanden sind, so multiplizire man sowohl den Zähler als den Nenner mit x^m, gesetzet daß $-m$ der größte verneinte Exponent ist. Es sei diese Funkzion gegeben

$$\frac{ax + bx^{-3}}{c + dx^{-4} + x^3}$$

Weil hier -4 der größte verneinte Exponent ist, so multiplizire man oben und unten mit x^4, so kommt

$$\frac{ax^5 + bx}{cx^4 + d + x^7}$$

Werden nur die Glieder gehöriger Maßen geordnet, so bekommt der Bruch diese regelmäßige Gestalt

$$\frac{0 + bx + 0.x^2 + 0.x^3 + 0.x^4 + ax^5 + 0.x^6}{d + 0x + 0.x^2 + 0x^3 + cx^4 + 0.x^5 + 0.x^6 + 1.x^7}$$

Man siehet hier zugleich, daß man, vermittelst des Koeffizienten o, den Zähler so einrichten kann, daß er eine Ausmessung weniger habe, als der Nenner.

III

III) Wenn der Zähler weniger Ausmessungen hat, als der Nenner, so kann man vermittelst der Division den Bruch in eine ganze und eine gebrochene Funkzion verwandeln. In der letzten wird der Zähler weniger Ausmessungen haben, als der Nenner. Es sei dieser Bruch gegeben

$$\frac{3x^5 + x^3 - 4}{2x^2 + 15x}$$

Man dividire den Zähler durch den Nenner

$$(3x^5+x^3-4):(2x^2+15x)=\tfrac{3}{2}x^3-\frac{45}{4}x^2+\frac{679}{8}x-\frac{10185}{16}+\frac{\frac{152775}{16}x-4}{2x^2+15x}$$

$$3x^5+\tfrac{45}{2}x$$

$$-\tfrac{45}{2}x^4+x^3-4$$

$$\tfrac{45}{2}x^4-\tfrac{675}{4}x^3$$

$$+\tfrac{679}{4}x^3-4$$

$$+\tfrac{679}{4}x^3+\tfrac{10185}{8}x^2$$

$$-\tfrac{10185}{8}x^2-4$$

$$-\tfrac{10185}{8}x^2-\tfrac{152775}{16}x$$

$$+\tfrac{152775}{16}x-4$$

Hier ist der Bruch verwandelt worden in eine ganze Funkzion vom dritten Grade, und in eine gebrochene, wo der Nenner eine Dimension mehr hat, als der Zähler. Will man beide nach der in der Formel angenommenen Ordnung schreiben, so bekommen sie diese Gestalt.

$$-\frac{10185}{16}+\frac{679}{8}x-\frac{45}{4}x^2+\tfrac{3}{2}x^3$$

$$+\frac{-4+\frac{152775}{16}x}{0+15x+2x^2}$$

§. 15.

§. 15.

Es ist oft nöthig, die Funkzionen zu verwandeln, das heißt, ihnen eine bequemere Gestalt zu geben. Meistens geschiehet die Verwandlung indem man aus der gegebenen Funkzion eine Summe mehrerer Funkzionen machet, oder auch die Funkzion in eine unendliche Reihe verwandelt. Zu diesem Zwecke leisten die **unbestimmten Koeffizienten** gute Dienste. Man giebt überhaupt in der Lehre von den Funkzionen und Gleichungen, allen beständigen und bekannten Größen den Namen Koeffizienten, wenn sie vor den veränderlichen oder unbekannten Größen als Faktoren stehen. Ob nun gleich alle Koeffizienten die durch Buchstaben ausgedrucket werden, unbestimmt sind, in so fern ihr Werth willkürlich ist; so nennet man doch insbesondere solche Koeffizienten unbestimmt, die noch eigentlich gar keinen Werth haben, sondern deren Werth erst aus anderen bekannten Koeffizienten bestimmet werden soll.

Dieses ist also zu verstehen. Wenn eine Funkzion eine andere Form bekommen soll, so nimmt man an, sie habe schon diese Form, und machet eine Gleichung, deren erstes Hauptglied die gegebene Funkzion, und das andere die angenommene Funkzion ist. In dieser letzten sind die Koeffizienten noch unbekannt, werden aber unterdessen doch mit den ersten Buchstaben des Alphabets, als bekannte Größen bezeichnet. Diese Buchstaben nun, wozu man meistens Kapital-Schrift gebrauchet, sind die **unbestimmten Koeffizienten**. Eine Gleichung, wo eine Funkzion einerseits bestimmte und andrerseits unbestimmte Koeffizienten hat, heißt eine **identische Gleichung**.

§. 16.

Aufgabe.

Eine razionale gebrochene Funkzion von x in einfache Brüche auflösen, deren Summe sie ist.

Auflösung. Man suche die Faktoren, woraus der Nenner entstehet (§. 13). Man mache so viel einzelne Brü-

Brüche als Faktoren vorhanden sind. Diesen Brüchen gebe man die gefundenen Faktoren zu Nennern, und in den Zählern setze man unbestimmte Koeffizienten. Man mache eine Gleichung, wo die gegebene Funkzion das erste Glied ausmachet, und wo das zweite Glied die Summe der angenommenen Brüche ist. Man bringe alle Brüche unter einen Nenner. So bekommt man beiderseits Zähler, die einander gleich sein müssen. Man vergleiche die beiderseitigen Koeffizienten, die zur nämlichen Potenz von x gehören. So werden sich aus allen diesen Vergleichungen die unbestimmten Koeffizienten bestimmen laßen.

Beispiel I. Es sei diese Funkzion gegeben

$$\frac{1+2x+3x^2}{-6-5x+2x^2+x^3}$$

Suchet man die Faktoren des Nenners, so bekommt die Funkzion folgende Gestalt

$$\frac{1+2x+3x^2}{(x+1)(x-2)(x+3)}$$

Nun nehme man an, es sei

$$\frac{1+2x+3x^2}{(x+1)(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$

Hier sind A, B und C unbestimmte Koeffizienten. Auch hat man den Zählern eine veränderliche Ausmessung weniger gegeben, als den Nennern. Denn die Zähler enthalten nur x^0, die Nenner aber x^1. Nun bringe man alles unter einen Nenner, so ist

$$\frac{1+2x+3x^2}{(x+1)(x-2)(x+3)} = \frac{A(x-2)(x+3)+B(x+1)(x+3)+C(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)(x+3)}$$

Folglich, wenn man beiderseits mit dem Nenner multipliziret,

$$1+2x+3x^2 = A(x-2)(x+3)+B(x+1)(x+3)+C(x+1)(x-2)$$

oder

oder, wenn man die Produkte entwickelt,

$$1+2x+3x^2=\left\{\begin{matrix}-6A\\+3B\\-2C\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}A\\+4B\\-C\end{matrix}\right\}x+\left\{\begin{matrix}A\\+B\\+C\end{matrix}\right\}x^2$$

Soll nun diese Gleichung identisch sein, so müssen die Koeffizienten beiderseits Glied für Glied mit einander übereinstimmen. Vergleichet man sie also mit einander, so entstehen folgende drei Gleichungen.

$$\begin{aligned}-6A+3B-2C&=1\\A+4B-C&=2\\A+B+C&=3\end{aligned}$$

Aus diesen drei Gleichungen suche man die Werthe der Größen A, B und C, wie im XIIten Hauptstücke §. 3 gelehret worden. Man findet

$$\begin{aligned}A&=-\tfrac{1}{3}\\B&=+\tfrac{17}{15}\\C&=+\tfrac{11}{5}\end{aligned}$$

Setzet man nun diese Werthe anstatt A, B und C in die erstlich angenommene Gleichung, so bekommt man

$$\frac{1+2x+3x^2}{-6-5x+2x^2+3x^3}=-\frac{1}{3(x+1)}+\frac{17}{15(x-2)}+\frac{11}{5(x+3)}$$

Und also ist der gegebene Bruch in die Summe dreier einfachen Brüche verwandelt.

Beispiel II. Es sei gegeben diese Funkzion:

$$\frac{1+x^3}{-x+3x^2-3x^3+x^4}$$

Hier siehet man sogleich, daß x ein Faktor des Nenners ist. Dividiret man also durch x, so kommt

$$-1+3x-3x^2+x^3$$

welche Funkzion sich nach §. 13 in

$$(x-1)(x-1)(x-1) \text{ oder } (x-1)^3$$

auf-

auflöſen läßt. Alſo verwandelt ſich erſtlich die gegebene Funkzion in dieſe

$$\frac{1+x^3}{x(x-1)^3}$$

Laßt uns nun annehmen

$$\frac{1+x^3}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B+Cx+Dx^2}{(x-1)^3}$$

Hier nehmen wir im letzten Zähler zwei Dimenſionen an, weil der Nenner deren drei hat. Wird alles unter einen Nenner gebracht, ſo entſtehet

$$\frac{1+x^3}{x(x-1)^3} = \frac{A(x-1)^3+Bx+Cx^2+Dx^3}{x(x-1)^3}$$

Wird beiderſeits mit dem Nenner multiplizirt, ſo wird

$$1+x^3 = A(x-1)^3+Bx+Cx^2+Dx^3$$

Wird die dritte Potenz entwickelt, und werden linker Hand die mangelnden Sätze ausgefüllet, ſo bekommt man

$$1+0.x+0.x^2+1.x^3 = A+\left\{\begin{matrix}-3A\\+B\end{matrix}\right\}x+\left\{\begin{matrix}+3A\\-2B\\+C\end{matrix}\right\}x^2+\left\{\begin{matrix}-A\\+B\\-C\\+D\end{matrix}\right\}x^3$$

Dieſes gibt vier Gleichungen

$$\begin{aligned} A &= 1\\ -3A+B &= 0\\ 3A-2B+C &= 0\\ -A+B-C+D &= 1 \end{aligned}$$

Hieraus ziehet man

$$\begin{aligned} A &= 1\\ B &= +3\\ C &= +3\\ D &= 0 \end{aligned}$$

Wenn man dieſe Werthe in die angenommene Gleichung ſetzet, ſo wird

$$\frac{1+x^3}{-x+3x^2-3x^3+x^4} = \frac{1}{2} + \frac{-3+3x}{(x-1)^3}$$

Weil

Weil der letzte Bruch noch zusammengesetzet ist, so kann man ihn wiederum folgender Maßen aus einander setzen. Man nehme an, es sei

$$\frac{-3+3x}{(x-1)^3} = \frac{A'}{(x-1)^3} + \frac{B'}{(x-1)^2} + \frac{C'}{x-1}$$

Wird alles unter einen Nenner gebracht, so hat man

$$\frac{-3+3x}{(x-1)^3} = \frac{A'}{(x-1)^3} + \frac{B'(x-1)}{(x-1)^3} + \frac{C'(x-1)^2}{(x-1)^3}$$

Folglich

$$-3+3x = A' + B'(x-1) + C'(x-1)^2$$

oder wenn man alles gehörig entwickelt

$$\begin{aligned} -3+3x = {} & A' \\ & -B' + B'x \\ & +C' - 2C'x + C'x^2 \end{aligned}$$

Woraus diese drei Gleichungen entstehen

$$\begin{aligned} A' - B' + C' &= -3 \\ B' - 2C' &= +3 \\ C' &= 0 \end{aligned}$$

Hieraus kommen folgende Werthe

$$\begin{aligned} C' &= 0 \\ B' &= +3 \\ A' &= 0 \end{aligned}$$

Setzet man diese Werthe in der angenommenen Gleichung, so wird

$$\frac{-3+3x}{(x-1)^3} = \frac{0}{(x-1)^3} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{0}{x-1}$$

oder kürzer

$$\frac{-3+3x}{(x-1)^3} = \frac{3}{(x-1)^2}$$

Wird nun dieser Werth wiederum in der erst gefundenen Auflösung gesetzet, so ist

$$1+x^3$$

$$\frac{1+x^3}{-x+3x^2-3x^3+x^4} = \frac{1}{x} + \frac{3}{(x-1)^2}$$

Man hätte auf eine viel leichtere Art finden können, daß $\frac{-3+3x}{(x-1)^3} = \frac{3}{(x-1)^2}$. Denn $\frac{-3+3x}{(x-1)^3} = \frac{3(-1+x)}{(x-1)^3}$ $= \frac{3(x-1)}{(x-1)^3} = \frac{3}{(x-1)^2}$. Allein es war eine bequeme Gelegenheit, hier den Gebrauch der unbestimmten Koeffizienten zu zeigen.

Beispiel III. Es sei gegeben diese Funkzion

$$\frac{7x}{x^3-5x^2+12x-60}$$

Der Nenner verschwindet, wenn man annimmt $x = 5$ oder $x - 5 = 0$. Also ist $x - 5$ einer der Faktoren. Dividiret man den Nenner durch $x - 5$, so kommt $x^2 + 12$. Man löse nun diese Gleichung auf

$$x^2 + 12 = 0$$

so findet man

$$x = +2\sqrt{-3}$$

oder $x + 2\sqrt{-3} = 0$.

Die drei Faktoren sind also

$$x - 5$$
$$x - 2\sqrt{-3}$$
$$x + 2\sqrt{-3}$$

Jedesmal wenn zwei eingebildete Faktoren vorkommen, darf man nur ihr Produkt als Faktor annehmen, also $x^2 + 12$ anstatt $x - 2\sqrt{-3}$ und $x + 2\sqrt{-3}$. Folglich wird die gegebene Funkzion

$$\frac{7x}{(x-5)(x^2+12)}$$

Man nehme an, es sei

$$\frac{7x}{(x-5)(x^2+12)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B+Cx}{x^2+12}$$

Wenn

Wenn alles unter einen Nenner gebracht wird, so entstehet

$$\frac{7x}{(x-5)(x^2+12)} = \frac{A(x^2+12)+B(x-5)+Cx(x-5)}{(x-5)(x^2+12)}$$

Und wenn beiderseits mit dem Nenner multiplizirt wird

$$7x = A(x^2+12)+B(x-5)+Cx(x-5)$$

Und wenn alles gehörig entwickelt wird,

$$\begin{aligned} 0+7x+0x^2 &= 12A \ldots + Ax^2 \\ &\quad -5B+Bx \\ &\quad\quad -5Cx \quad +Cx^2 \end{aligned}$$

Dieses giebt folgende drei Gleichungen

$$\begin{aligned} 12A - 5B &= 0 \\ B - 5C &= 7 \\ A + C &= 0 \end{aligned}$$

Daraus entstehet

$$\begin{aligned} A &= +\tfrac{35}{37} \\ B &= +\tfrac{84}{37} \\ C &= -\tfrac{35}{37} \end{aligned}$$

Werden nun diese Werthe anstatt der unbestimmten Koefizienten gesetzet, so kommt:

$$\frac{7x}{x^3-5x^2+12x-60} = \frac{35}{37(x-5)} + \frac{84-35x}{37(x^2+12)}$$

§. 17.

Aufgabe.

Eine gebrochene Funkzion von x in eine unendliche Reihe verwandeln.

Auflösung. Man nehme an, daß die Funkzion einer unendlichen Reihe von dieser Gestalt

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\&c.$$

gleich sei. Die Gleichung, welche aus dieser Voraussetzung

ſetzung entſpringet, wird Mittel an die Hand geben, um die unbeſtimmten Koeffizienten zu beſtimmen.

Beiſpiel I. Es ſei gegeben

$$\frac{4x}{3+2x+5x^2}$$

ſo nehme man an, es ſei

$$\frac{4x}{3+2x+5x^2} = Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+Ex^5+\&c.$$

Wir nehmen hier in der unendlichen Reihe kein bloß bekanntes Glied an, weil im Zähler keines vorhanden iſt. Man multiplizire beiderſeits durch den Nenner, ſo wird

$$\begin{aligned} 4x = {} & 3Ax+3Bx^2+3Cx^3+3Dx^4+3Ex^5+\&c. \\ & +2Ax^2+2Bx^3+2Cx^4+2Dx^5+\&c. \\ & +5Ax^3+5Bx^4+5Cx^5+\&c. \end{aligned}$$

Hieraus entſtehen folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} 3A &= 4 \\ 3B+2A &= 0 \\ 3C+2B+5A &= 0 \\ 3D+2C+5B &= 0 \\ 3E+2D+5C &= 0 \end{aligned}$$

Hieraus bekommt man

$$\begin{aligned} A &= +\tfrac{4}{3} \\ B &= -\tfrac{8}{9} \\ C &= -\tfrac{44}{27} \\ D &= +\tfrac{208}{81} \\ E &= +\tfrac{244}{243} \end{aligned}$$

Seßet man dieſe Werthe an die Stelle der unbeſtimmten Koeffizienten in die angenommene Gleichung, ſo bekommt man

$$\frac{4x}{3+2x+5x^2} = \tfrac{4}{3}x-\tfrac{8}{9}x^2-\tfrac{44}{27}x^3+\tfrac{208}{81}x^4+\tfrac{244}{243}x^5+\&c.$$

Beispiel II. Man soll $\sqrt{(1-x^2)}$ durch eine unendliche Reihe ausdrucken. Man setze

$$\sqrt{(1-x^2)} = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + Ex^8 + \&c.$$

Wir lassen hier die unpaarigen Potenzen aus, weil man voraussehen kann, daß man sie nicht nöthig hat. Man quadrire beide Glieder, indem man die unendliche Reihe mit sich selbst multiplizirt.

$$\begin{aligned}
\sqrt{(1-x^2)} &= A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + Ex^8 + \&c.\\
\times\sqrt{(1-x^2)} &= A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + Ex^8 + \&c.\\
\hline
1-x^2 &= A^2 + ABx^2 + ACx^4 + ADx^6 + AEx^8 + \&c.\\
&\quad + ABx^2 + B^2x^4 + BCx^6 + BDx^8 + \&c.\\
&\quad + ACx^4 + BCx^6 + CCx^8 + \&c.\\
&\quad + ADx^6 + BDx^8 + \&c.\\
&\quad + AEx^8 + \&c.
\end{aligned}$$

$$1-x^2 = A^2 + 2ABx^2 + \left(\begin{matrix}2AC\\ +B^2\end{matrix}\right)x^4 + \left(\begin{matrix}2AD\\ +2BC\end{matrix}\right)x^6 + \left(\begin{matrix}2AE\\ 2BD\\ CC\end{matrix}\right)x^8 + \&c.$$

Es muß also sein:

$$\begin{aligned}
A^2 &= 1\\
2AB &= -1\\
2AC + B^2 &= 0\\
2AD + 2BC &= 0\\
2AE + 2BD + CC &= 0\\
&\&c.\ \&c.
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen bekommt man

$$\begin{aligned}
A &= +1\\
B &= -\tfrac{1}{2}\\
C &= -\tfrac{1}{8}\\
D &= -\tfrac{1}{16}\\
E &= -\tfrac{5}{128}\ \text{u. s. f.}
\end{aligned}$$

Folglich wird

$$\sqrt{(1-x^2)} = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{8}x^4 - \tfrac{1}{16}x^6 - \tfrac{5}{128}x^8 - \&c.$$

Beispiel III. Man soll die Funkzion $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$ in eine unendliche Reihe verwandeln. Es sei

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + \&c.$$

Man mache beiderseits das Quadrat, so wird

$$\frac{1}{1-x^2} = A^2 + 2ABx^2 + 2ACx^4 + 2ADx^6 + \&c.$$
$$+ B^2x^4 + 2BCx^6$$

Multiplizirt man beiderseits mit $1-x^2$, so kommt

$$1 = A^2 + 2ABx^2 + 2ACx^4 + 2ADx^6 + \&c.$$
$$+ B^2x^4 + 2BCx^6 + \&c.$$
$$- A^2x^2 - 2ABx^4 - 2ACx^6 + \&c.$$
$$- B^2x^6 - \&c.$$

Hieraus entstehen nun folgende Gleichungen:

$$A^2 = 1$$
$$2AB - A^2 = 0$$
$$2AC + B^2 - 2AB = 0$$
$$2AD + 2BC - 2AG - B^2 = 0$$
$$\&c. \quad \&c.$$

Diese geben folgende Werthe:

$$A = 1$$
$$B = \tfrac{1}{2}$$
$$C = \tfrac{3}{8}$$
$$D = \tfrac{5}{16} \quad \&c. \quad \&c.$$

Es ist folglich

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{3}{8}x^4 + \tfrac{5}{16}x^6 + \&c.$$

Beispiel IV. Der Bruch $\frac{a}{a-x}$ soll in eine unendliche Reihe verwandelt werden. Es sei

$$\frac{a^n}{\quad}$$

$$\frac{a}{a-x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c.$$

Man multiplizire beiderseits mit $a - x$

$$a = aA + aBx + aCx^2 + aDx^3 + aEx^4 + \&c.$$
$$- Ax - Bx^2 - Cx^3 - Dx^4 - \&c.$$

Folglich wird

$$\begin{aligned} aA &= a \\ aB - A &= 0 \\ aC - B &= 0 \\ aD - C &= 0 \\ aE - D &= 0 \\ &\&c.\ \&c. \end{aligned}$$

Hieraus bekommt man

$$A = 1$$
$$B = \frac{1}{a}$$
$$C = \frac{1}{a^2}$$
$$D = \frac{1}{a^3}$$
$$E = \frac{1}{a^4},$$
$$\&c.\ \&c.$$

Seßet man diese Werthe in die angenommene Gleichung, so bekommt man

$$\frac{a}{a-x} = 1 + \frac{1}{a}x + \frac{1}{a^2}x^2 + \frac{1}{a^3}x^3 + \frac{1}{a^4}x^4 + \&c.$$

oder $$\frac{a}{a-x} = 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{a^4} + \&c.$$

Wenn man hier b anstatt x schreibet, so ist dieses die näm-

nämliche Reihe, welche im IVten Hauptstücke §. 29 durch die Division erhalten worden.

§. 18.

Eine veränderliche Größe in einer Funkzion stellet alle mögliche Größen ihrer Art vor. Z. B. wenn in dem Bruche $\frac{a}{y}$, der Nenner y als veränderlich angesehen wird, so kann man ihn vergrößern oder verkleinern, so viel man will. Folglich stellet hier y alle mögliche Divisoren der Größe a vor. In der Reihe

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \&c.$$

stellen x, x^2, x^3, $x^4 + \&c.$, die Potenzen aller möglichen unbekannten Größen vor, u. s. f.

§. 19.

Wenn eine Größe einer Funkzion gleich ist, so saget man, der Kürze halben, sie sei die Funkzion selbst. Z. B. Wenn $z = xy$, so saget man, z ist eine Funkzion von x und y.

§. 20.

Wenn eine Größe z eine Funkzion anderer Größen ist, so wird vorausgesetzet, daß man die Größe z nicht verändern kann, wie man will; sondern daß die Veränderung des z immer von den Veränderungen der Größen, die in der Funkzion sind, abhänge; damit die Gleichung bei jeder Veränderung Statt finde. Z. B. Es sei $z = axy$, so verstehet es sich, daß z dem Produkte axy nicht nur bei einem bestimmten Werthe von x und y, sondern bei allen möglichen Werthen dieser Faktoren gleich bleiben soll. Obgleich also die Veränderungen des x und y hier willkührlich sind, so ist doch die Veränderung des z

nicht willkührlich, sondern sie hänget gänzlich von den Werthen ab, welche die Größen x und y bekommen.

§. 21.

Jede Funkzion einer veränderlichen Größe ist selbst eine veränderliche Größe; weil sie den Veränderungen der in der Funkzion enthaltenen Größen folgen muß. Wenn also $z = axy$, wo x und y veränderlich sind, so ist z auch veränderlich.

§. 22.

Es ist am gehörigen Orte (VIII Hauptst. §. 2.) gesaget worden, daß ein Verhältniß nichts anders ist, als die Art, wie eine Größe aus anderen entstehet. Eine Größe entstehet aber aus anderen, wenn diese zusammen addiret, oder von einander subtrahiret, oder mit einander multipliziret, oder eine durch die andere dividiret, oder eine zur anderen erhoben, oder eine durch die andere angewiesen werden.

Das Verhältniß einer Größe gegen andere Größen kann also jedesmal durch eine Funkzion dieser anderen Großen ausgedrucket werden. Z. B. $a = \left(\frac{b}{c}\right)^n$ drucket das Verhältniß des a gegen b, c und n aus, und zeiget an, daß a aus b, c und n entstehet, wenn b durch c dividiret, und der Quozient zu n erhoben wird.

§. 23.

In einer Gleichung kann jede Größe durch eine Funkzion aller anderen ausgedrucket werden. Denn es kann jede Größe allein auf eine Seite gebracht werden, und so erhält man auf der anderen Seite eine Funkzion aller anderen Größen, wodurch der Werth der einen ausgedrucket wird. Z. B. Es sei

$$a+bc=dc-m^n$$

so ist $a=(d-b)c-m^n$

$$b=d-\frac{m^n+a}{c}$$

$$c=\frac{-a+m^n}{d-b}$$

$$m=\sqrt[n]{(dc-bc-a)}$$

Also ist in einer Gleichung das Verhältniß jeder Größe gegen alle übrigen enthalten, oder eine Gleichung drucket die Verhältnisse aller Größen aus, die in den Gliedern enthalten sind.

§. 24.

Eine Gleichung bestehet aus lauter Funkzionen. Jede Seite der Gleichung machet zusammen eine Funkzion aus. Jede dieser beiden Funkzionen kann wiederum aus Funkzionen bestehen.

Da aber in jeder Funkzion die Größen verändert werden können, so können auch die Größen in einer Gleichung verändert werden.

§. 25.

Wenn einige Größen in einer Gleichung als veränderlich betrachtet werden, so wird vorausgesetzet, daß bei allen ihren Veränderungen die Gleichung wahr bleibe, oder daß die nämlichen Verhältnisse der Größen immer Statt finden, wie schon §. 20 angemerket worden.

§. 26.

Weil nun das nämliche bei allen unbestimmten Gleichungen Statt findet (XII. Hauptst. §. 5), so können auch alle Gleichungen zwischen veränderlichen Größen als

unbestimmte Gleichungen, und umgekehrt, alle unbekannte Größen in einer unbestimmten Aufgabe, als veränderliche Größen betrachtet werden. In solchen unbestimmten Aufgaben wird also weiter nichts gesuchet, als das Verhältniß, welches jede der unbekannten Größen gegen die übrigen haben soll. Und da jede unbekannte Größe eine Funkzion aller anderen ist, so wird sie bestimmt, so bald die übrigen bestimmet werden.

§. 27.

Aufgabe.

Wenn eine Gleichung zwischen x und y gegeben ist, den Werth der einen veränderlichen oder unbekannten Größe x durch eine unendliche Funkzion von y auszudrucken.

Auflösung. Man setze x sei gleich einer unendlichen Reihe, die nach den Potenzen von y geordnet ist, und deren Koeffizienten man anfänglich unbestimmt läßt. Diese Reihe und ihre Potenzen setze man in die Gleichung. Wenn dieses geschehen, so hat man eine identische Gleichung, und es bleibet nichts mehr zu thun, als daß man die beiderseitigen Koeffizienten vergleiche.

Beispiel I. Es sei

$ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + \&c. = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4$ &c. wo unter $a, b, c, d,$ &c. und $\alpha, \beta, \gamma, \delta,$ &c. lauter bekannte und unveränderliche Koeffizienten verstanden werden. Man nehme an, es sei

$$x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \&c.$$

So wird

$$x^2 = A^2y^2 + 2ABy^3 + 2ACy^4 + \&c.$$
$$+ B^2\ y^4 + \&c.$$
$$x^3 = \ldots\ A^3y^3 + 3A^2By^4 + \&c.$$
$$x^4 = \ldots\ A^4y^4 + \&c.$$

Wenn

Wenn man diese Werthe von x, x^2, x^3, x^4, &c., in die gegebene Gleichung setzet, so bekommt man

$$\begin{aligned} \alpha y + by^2 + cy^3 + dy^4 \text{ &c.} = {} & A\alpha y + B\alpha y^2 + C\alpha y^3 + D\alpha y^4 + \text{&c.} \\ & + A^2\beta y^2 + 2AB\beta y^3 + 2AC\beta y^4 + \text{&c.} \\ & + B^2\beta y^4 + \text{&c.} \\ & + A^3\gamma y^3 + 3A^2B\gamma y^4 + \text{&c.} \\ & + A^4\delta y^4 + \text{&c.} \end{aligned}$$

Weil diese Gleichung identisch sein soll, so muß sein

$$\begin{aligned} A\alpha &= a \\ B\alpha + A^2\beta &= b \\ C\alpha + 2AB\beta + A^3\gamma &= c \\ D\alpha + 2AC\beta + B^2\beta + 3A^2B\gamma + A^4\delta &= d \\ &\text{&c. &c.} \end{aligned}$$

Daraus ziehet man

$$A = \frac{a}{\alpha}$$

$$B = \frac{b - A^2\beta}{\alpha}$$

$$C = \frac{c - 2AB\beta - A^3\gamma}{\alpha}$$

$$D = \frac{d - 2AC\beta - B^2\beta - 3A^2B\gamma - A^4\delta}{\alpha}$$

&c. &c.

Da man a, b, c, d, &c. und α, β, γ, δ, &c. kennet, so wird es leicht sein, in jedem Falle A, B, C, D &c. zu bestimmen.

Beispiel II. Es sei

$$y = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \text{&c.}$$

Es soll x durch eine unendliche Reihe ausgedrucket werden, worin alle Glieder Funkzionen von x seien. Man könnte hier die nämliche Rechnung vernehmen, wie beim vorigen Beispiele. Aber, der Kürze halben, kann man

bemerken, daß dieses Beispiel im Grunde mit dem vorhergehenden übereinstimmet, wenn man nur in der letzte gefundenen Formel setzet

$$a = 1$$
$$b = 0$$
$$c = 0$$
$$d = 0$$
$$\&c.\ \&c.$$

Alsdann bekommt man aus gedachter Form

$$A = \frac{1}{\alpha}$$

$$B = \frac{-A^2\beta}{\alpha}$$

$$C = \frac{-2AB\beta - A^3\gamma}{\alpha}$$

$$D = \frac{-2AC\beta - B^2\beta - 3A^2B\gamma - A^4\delta}{\alpha}$$

$$\&c.\ \&c.$$

Anmerkung. Gegen die identischen Gleichungen, die wir in den vorhergehenden Paragraphen so häufig gebrauchet haben, könnte man eine Einwendung machen. Gesetzt man nehme an

$$x = A + By + Cy^2 + Dy^3 + \&c.$$

wo A, B, C erst durch Rechnung bestimmt werden müssen. Nun aber möchte jemand meinen, diese Koeffizienten könnten nie gänzlich bestimmet werden. Gesetzt man nähme B etwas zu klein, so könnte ja dem C etwas zugesetzet werden, damit $By + Cy^2$ doch denselbigen Werth behielte, und so mit den übrigen. Dieses ginge wohl für einen Werth des x und y an, aber nicht für alle mögliche. Denn gesetzt man nehme von B ab die Menge d, und setze dem C zu die Menge u, so müßte sein

(B—a)

$$
\begin{aligned}
(B-d)y+(C+u)y^2 &= By+Cy^2\\
By-dy+Cy^2+uy^2 &= By+Cy^2\\
-dy+uy^2 &= 0\\
-d+uy &= 0\\
uy &= d\\
u &= \frac{d}{y}
\end{aligned}
$$

woraus man siehet, daß die dem C zuzusetzende Größe von dem Werthe des y abhängen würde. Hieraus muß man schließen, daß wenn, nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten die Werthe von A, B, C u. s. w. gefunden worden, dieser Werth nicht mehr geändert werden kann, wenn nämlich die Gleichung für alle mögliche Werthe von x und y gelten soll.

Vierzehntes Hauptstück.

Von der Veränderung der Funkzionen.

§. 1.

Wenn man anzeigen will, daß eine Größe x um irgend einen Theil zunehmen oder abnehmen soll, so bezeichnet man dasjenige was zugesetzet oder abgenommen werden soll, mit demselbigen Buchstaben x, nebst dem Zeichen Δ (Delta) davor. Also heißt $x \pm \Delta x$ so viel, als daß x um eine Größe die mit Δx bezeichnet ist, abnehmen oder zunehmen soll.

Gesetzet, ich will wissen, um wie viel ein Produkt zunimmt, wenn beide Faktoren größer werden. Da hier beide Faktoren verändert werden, so schreibe ich erstlich xy (XII. Hauptst. §. 4.). Wenn nun x um Δx, und y um Δy zunehmen, so bekommt man $(x + \Delta x) \cdot (y + \Delta y) = xy + y\Delta x + x\Delta y + \Delta x \cdot \Delta y$. Folglich nimmt das Produkt zu, um $y\Delta x + x\Delta y + \Delta x \cdot \Delta y$. Das heißt, die Vergrößerung des Produktes bestehet 1) aus dem zweiten Faktor mit der Zunahme des ersten multipliziret, 2) aus dem ersten Faktor mit der Zunahme des zweiten multipliziret, 3) aus dem Produkte beider Zunahmen.

§. 2.

Wenn eine Funkzion veränderliche Größen enthält, so ist sie selbst veränderlich, (XIII. Hauptst. §. 21.) und ihre Zunahme oder Abnahme kann eben so wie die Zunahme oder Abnahme einzelner Größen angedeutet werden.

den. (§. 1). Also heißt $\Delta(xy)$ eben so viel, als die Zunahme von xy, wenn x und y größer werden. Aus dem Beispiel in §. 1. siehet man, daß $\Delta(xy) = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x.\Delta y$.

§. 3.

Die Veränderung einer Größe ist diejenige Größe, welche zur veränderlichen zugesetzet, oder von derselben abgenommen wird. Wenn ich im Produkte xy, sowohl x als y vergrößere, so entstehet $(x+\Delta x)(y+\Delta y) = xy + y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$. Hier ist Δx die Veränderung der Größe x, Δy ist die Veränderung der Größe y. Und $y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$, ist die Veränderung der Funkzion xy. Diese letzte Veränderung entstehet aus den vorigen, und ist eine Funkzion von x, y, Δx und Δy.

§. 4.

Aufgabe.

Die Veränderung einer Funkzion finden, nachdem man bestimmet hat, welche Größen verändert werden sollen, und welche beständig oder unverändert bleiben sollen.

Auflösung. Man schreibe anstatt der veränderlichen Größen, dieselbigen veränderlichen Größen mit ihren Veränderungen: von der veränderten Funkzion, die alsdann entstehet, ziehe man die gegebene Funkzion ab: so bekommt man die Veränderung der gegebenen Funkzion.

Beispiel I. Es sei verlanget $\Delta(x+y)$. Wenn man anstatt x, $x+\Delta x$, und anstatt y, $y+\Delta y$ schreibet, so entstehet

$(x+\Delta x)$

$$\begin{array}{rl} & (x+\Delta x)\pm(y+\Delta y) \\ \text{oder} & x+\Delta x \pm y \pm \Delta y \\ \text{davon ab} & x \ldots \pm y \\ \hline \text{bleibet} & +\Delta x \ldots \pm \Delta y = \Delta(x \pm y) \end{array}$$

Beispiel II. Es sei verlanget $\Delta(xy)$. Schreibet man $x+\Delta x$ anstatt x, und $y+\Delta y$, anstatt y, so bekommt man

$$\begin{array}{rl} & (x+\Delta x)\,(y+\Delta y) \\ \text{oder} & xy+y\Delta x+x\,\Delta y+\Delta x\Delta y \\ \text{davon ab} & xy \\ \hline \text{bleibet} & \ldots\; y\Delta x+x\,\Delta y+\Delta x\Delta y = \Delta(xy). \end{array}$$

Beispiel III. Man verlanget $\Delta\left(\frac{x}{y}\right)$. Wenn man $x+\Delta x$ anstatt x, und $y+\Delta y$ anstatt y schreibet, so bekommt man

$$\begin{array}{rl} & \frac{x+\Delta x}{y+\Delta y} \\ \text{subtr.} & \frac{x}{y} \\ \hline \text{bleibet} & \frac{x+\Delta x}{y+\Delta y} - \frac{x}{y} \end{array}$$

oder wenn man beide Brüche unter einen Nenner bringet, und einen Zähler vom anderen abziehet,

$$\frac{y\Delta x - x\Delta y}{yy + y\Delta y} = \Delta\left(\frac{x}{y}\right)$$

Beispiel IV. Es werde verlanget $\Delta(x^n)$, setzet man $x+\Delta x$ anstatt x, so kommt

$$(x+\Delta x)^n$$

$$\text{oder } x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}\Delta x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}\Delta x^3 + \text{&c.}$$
$$\text{davon ab } x^n$$

$$\text{bleibet } nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}\Delta x^2 + \text{&c.} = \Delta(x^n)$$

Zusatz I. Wir haben bei diesen Beispielen angenommen, daß die Größen in der Funkzion allemal zunehmen. Sollten aber einige Größen abnehmen, so würden ihre Veränderungen das Zeichen — bekommen, und das Verfahren würde übrigens das nämliche sein. Z. B. In der Funkzion xy sollen x und y abnehmen, so verwandelt sich diese Funkzion in

$$(x - \Delta x)(y - \Delta y)$$
$$\text{oder } xy - y\Delta x - x\Delta y + \Delta x\Delta y$$
$$\text{davon ab } xy$$
$$\text{bleibet } -y\Delta x - x\Delta y + \Delta x\Delta y = \Delta(xy)$$

Man kann auch anfänglich die Veränderungen als bejahet annehmen. Darauf muß man aber in der Veränderung der Funkzion diejenigen Glieder beobachten, worinn die verneinten Faktoren in unpaariger Anzahl oder unpaariger Potenz vorkommen. Bei solchen Gliedern müssen die Zeichen + und — verwechselt werden. Z. B. wenn x und y zunehmen, so ist $\Delta(xy) = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$. Soll Δx verneinet sein, so wird $\Delta(xy) = -y\Delta x + x\Delta y - \Delta x\Delta y$. Sollen Δx und Δy beide verneinet sein, so wird $\Delta(xy) = -y\Delta x - x\Delta y + \Delta x\Delta y$. Soll im IVten Beispiele x abnehmen, so wird $\Delta(x^n) = -nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}\Delta x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}\Delta x^3 + \text{&c.}$ Uebrigens wird die Veränderung der ganzen Funkzion allemal als bejahet angesehen. Die Rechnung muß ausweisen, ob sie wirklich bejahet ist, oder verneinet.

Zusatz II. Wenn man sich die in den Beispielen gefundenen Formeln merket, so kann man in einer Funkzion

zion die Veränderung jedes Gliedes suchen, ohne das Abziehen zu verrichten. Es sei verlanget die Veränderung von $xy + \frac{x}{z} - y^2$, so bekommt man

$$\Delta(xy) = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y.$$

$$\Delta\left(\frac{x}{z}\right) = \frac{z\Delta x - x\Delta z}{zz + z\Delta z}$$

$$\Delta(y^2) = 2y\Delta y + \Delta y^2$$

und $-\Delta(y^2) = -2y\Delta y - \Delta y^2$

Nimmt man diese einzelne Veränderungen zusammen, wie aus dem ersten Beispiele erhellet, so bekommt man

$$\Delta\left(xy + \frac{x}{z} - y^2\right) = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y + \frac{z\Delta x - x\Delta z}{zz + z\Delta z} - 2y\Delta y - \Delta y^2$$

Zusatz III. Beständige Größen haben keine Veränderung. Will man sie aber als veränderliche Größen behandeln, so kann man ihnen keine andere Veränderung als o zuschreiben. Z. B. Man wollte die Formel $\Delta\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\Delta x - x\Delta y}{yy + y\Delta y}$ gebrauchen um $\Delta\left(\frac{a}{y}\right)$ zu finden, so bekäme man $\frac{y\Delta a - a\Delta y}{yy + y\Delta y}$

oder weil $\Delta a = o$

$$\frac{-a\Delta y}{yy + y\Delta y}$$

Sonst könnte man das Abziehen zur Hülfe nehmen.

So bekäme man erstlich anstatt $\frac{a}{y}$, $\frac{a}{y + \Delta y}$.

Von

Von $\frac{a}{y+\Delta y}$

abgezogen $\frac{a}{y}$

bleibet $\frac{a}{y+\Delta y} - \frac{a}{y} = \frac{-a\Delta y}{yy+y\Delta y}$

§. 5.

Wenn in einer Gleichung veränderliche Größen angenommen werden, so wird dabei vorausgesetzet, daß die Gleichheit bei allen möglichen Werthen dieser Größen Statt findet (XIII. Hauptst. §. 25).

Soll aber dieses sein, so können die Veränderungen der Größen unmöglich alle willkürlich sein, sondern sie müssen auch gewisse Verhältnisse gegen einander haben. Denn jede Größe in der Gleichung ist eine Funktion aller anderen. Also muß die Veränderung jeder Größe ein gewisses Verhältniß gegen die Veränderungen aller anderen haben. Folglich müssen alle Veränderungen in einem gewissen Verhältnisse stehen.

Die Gleichung mnn, welche die Verhältnisse der Veränderungen in einer Gleichung ausdruckt, heißt die Veränderungsgleichung.

§. 6.

Aufgabe.

Wenn eine Gleichung gegeben ist, worin veränderliche Größen enthalten sind, die dazu gehörige Veränderungsgleichung finden.

Auflösung. Man setze bei jeder veränderlichen

Größe der Gleichung ihre Veränderung, zwischen die so veränderten Glieder der Gleichung setze man wiederum das Gleichungszeichen, weil die Gleichheit bei allen Veränderungen bleiben soll. Von dieser neuen Gleichung ziehe man die gegebene ab, nämlich das erste Glied von dem ersten, und das zweite von dem zweiten. Zwischen beiden Resten setze man abermals das Gleichungszeichen, so erhält man die verlangte Veränderungsgleichung.

Beispiel.

Es sei $ax + by = \frac{x}{c} + 3\zeta$

so muß sein $a(x+\Delta x)+b(y+\Delta y) = \frac{x+\Delta x}{c} + 3(\zeta+\Delta\zeta)$

oder $ax + a\Delta x + by + b\Delta y = \frac{x}{c} + \frac{\Delta x}{c} + 3\zeta + 3\Delta\zeta$

abgezogen $ax \ldots + by \ldots = \frac{x}{c} \ldots + 3\zeta$

bleibet $a\Delta x \ldots + b\Delta y = \ldots \frac{\Delta x}{c} \ldots + 3\Delta\zeta$

oder wenn man beiderseits mit c multipliziret

$$ac\Delta x + bc\Delta y = \Delta x + 3c\Delta\zeta$$

oder $(ac-1)\Delta x + bc\Delta y = 3c\Delta\zeta$

Hieraus erhält man

$$\Delta x = \frac{3c\Delta\zeta - bc\Delta y}{ac-1}$$

$$\Delta y = \frac{3c\Delta\zeta - (ac-1)\Delta x}{bc}$$

$$\Delta\zeta = \frac{(ac-1)\Delta x + bc\Delta y}{3c}$$

Also

Also ist das Verhältniß jeder Veränderung gegen die anderen Veränderungen und die gegebenen Größen bestimmt.

Zusatz. Weil hier jedes Glied um seine Veränderung vergrößert wird, und hernach das Glied selbst abgezogen wird, so ist dies Verfahren das nämliche, als wenn man die Veränderung jedes Gliedes insbesondere genommen hätte. Folglich kann man auch auf diese Art die Veränderungsgleichung finden. Weil also gegeben ist

$$ax+by=\frac{x}{c}+3z$$

so ist
$$\Delta(ax) = a\Delta x$$
$$\Delta(by) = b\Delta y$$
$$\Delta\left(\frac{x}{c}\right) = \frac{\Delta x}{c}$$
$$\Delta(3z) = 3\Delta z$$

folglich wird die Veränderungsgleichung

$$a\Delta x+b\Delta y=\frac{\Delta x}{c}+3\Delta z$$

eben so wie vorher.

§. 7.

Weil jede Veränderung eine Funkzion aller übrigen ist, so wird jede Veränderung bestimmet, wenn alle übrigen bestimmet werden. Wenn man den Veränderungen einen bestimmten Werth, z. B. in Zahlen geben will, so muß man nothwendig eine Veränderung unbestimmt lassen. Sie wird aus der Veränderungsgleichung durch die übrigen bestimmt werden.

§. 8.

Wenn man die Veränderung einer Funkzion gefunden hat, so kann man wiederum die Veränderung dieser

Veränderung suchen. Dieses ist also zu verstehen. Eine Größe hat um Δx zugenommen. Nun nimmt sie wieder zu. Aber man stellet sich vor, daß die zweite Zunahme der ersten nicht gleich, sondern etwas größer oder kleiner ist. Beide Veränderungen haben also einen Unterschied oder wiederum eine Veränderung. Diese Veränderung der Veränderungen wird ausgedrucket durch $\Delta\Delta$ oder Δ^2. Wenn also die Größe x das erste mal um Δx zugenommen hat, so nimmt sie das zweite mal noch zu, um $\Delta x + \Delta^2 x$, und wird $x + 2\Delta x + \Delta^2 x$. Dieses $\Delta\Delta x$ oder $\Delta^2 x$ heißt eigentlich die zweite Veränderung von x.

§. 9.

Aufgabe.

Die zweite Veränderung einer Funkzion finden.

Auflösung. Man nehme die erste Veränderung der Funkzion. Man vergrößere darin jede veränderliche Quantität um ihre Veränderung, und jede Veränderung um ihre zweite Veränderung. Hernach subtrahire man die erste Veränderung der Funkzion, so bleibet die zweite Veränderung.

Beispiel. Es sei gegeben $z = xy$, so findet man erstlich

$$\Delta z = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$$

Nun schreibe man anstatt $x, x + \Delta x$; anstatt $\Delta x, \Delta x + \Delta^2 x$, u. s. f.

$$\Delta z + \Delta^2 z = (y + \Delta y)(\Delta x + \Delta^2 x) + (x + \Delta x)(\Delta y + \Delta^2 y) + (\Delta x + \Delta^2 x)(\Delta y + \Delta^2 y)$$

oder $\Delta z + \Delta^2 z = (y\Delta x + x\Delta y + 3\Delta x\Delta y + y\Delta^2 x + x\Delta^2 y + 2\Delta x\Delta^2 y + 2\Delta y\Delta^2 x + \Delta^2 x\Delta^2 y$

abgez. $\Delta z \ldots = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$

bleibt $\Delta^2 z = 2\Delta x\Delta y + y\Delta^2 x + x\Delta^2 y + 2\Delta x\Delta^2 y + 2\Delta y\Delta^2 x + \Delta^2 x\Delta^2 y$

Beweis. Wenn x und y zum erstenmal größer werden, so wird

$$z + \Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y)$$

Wird

Wird nun zu allen veränderlichen Größen mehr als ihre vorige Zunahme zugesetzet, so kommt zu x wiederum hinzu $\Delta x + \Delta^2 x$, zu y kommt hinzu $\Delta y + \Delta^2 y$, zu z $\Delta z + \Delta^2 z$, folglich wird

$$z + 2\Delta z + \Delta^2 z = (x + 2\Delta x + \Delta^2 x)(y + 2\Delta y + \Delta^2 y)$$

davon abgezogen

$$2\Delta z = 2(x + \Delta x)(y + \Delta y) - 2xy$$

und noch z oder xy

$$\Delta^2 z = (x + 2\Delta x + \Delta^2 x)(y + 2\Delta y + \Delta^2 y) - 2(x + \Delta x)(y + \Delta y) + xy$$

Diesen nämlichen Ausdruck erhält man, wenn man nach der gegebenen Regel verfährt. Man nehme die erste Veränderung

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy$$

darin setze man $x + \Delta x$ anstatt x, $\Delta x + \Delta^2 x$ anstatt Δx, u. s. f., so bekommt man

$$\Delta z + \Delta^2 z = (x + 2\Delta x + \Delta^2 x)(y + 2\Delta y + \Delta^2 y) - (x + \Delta x)(y + \Delta y)$$

Hiervon subtrahire man die erste Veränderung, nämlich

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy$$

so bleibet wie vorher

$$\Delta^2 z = (x + 2\Delta x + \Delta^2 x)(y + 2\Delta y + \Delta^2 y) - 2(x + \Delta x)(y + \Delta y) + xy$$

Es ist also das Verfahren, welches in der Regel vorgeschrieben worden, im Grunde das nämliche, welches zu Anfange dieses Beweises herausgebracht worden.

Zusatz. Mit Gleichungen verfährt man eben so, wie mit Funkzionen, wenn man die zweite Veränderungsgleichung suchen will.

§. 10.

Nichts verhindert anzunehmen, daß in einer Funkzion der Zuwachs einer Größe immer mit gleichen Schritten geschehe, und daß eine Größe das zweite mal eben so viel zunehme, als das erste mal. Z. B. xy ist geworden $(x + \Delta x)(y + \Delta y)$. Nun kann man annehmen, daß x

das zweite mal wieder um Δx zunimmt, daß aber y jetzt um $\Delta y + \Delta^2 y$ zunimmt. In diesem Falle findet kein $\Delta^2 x$ statt, weil Δx das zweite mal nicht größer ist, als das erste mal. Es ist folglich $\Delta^2 x = 0$, und die Glieder, die $\Delta^2 x$ enthalten, fallen weg. Es wird folglich

$$\Delta^2 z = 2\Delta x \Delta y + x\Delta^2 y + 2\Delta x \Delta^2 y$$

§. 11.

Eben so wie die Größen in einer Funkzion zum zweitenmal zunehmen, so können sie noch zum dritten, vierten male, u. s. f. zunehmen. Der Unterschied zwischen dem ersten und zweiten, dem zweiten und dritten, dem dritten und vierten Werthe, u. s. f., welchen eine zunehmende Größe erlanget, heißt allemal die erste Veränderung. Der Unterschied zwischen zwei auf einander folgenden ersten Veränderungen, heißt allemal die zweite Veränderung. Der Unterschied zwischen zwei auf einander folgenden zweiten Veränderungen ist eine dritte Veränderung. Der Unterschied zwischen zwei auf einander folgenden dritten Veränderungen ist allemal die vierte Veränderung, u. s. f. Alle diese nach und nach entstehende Veränderungen heißen **Veränderungen von einer höhern Ordnung, oder von einem höheren Grade**, und die Gleichungen, welche die Verhältnisse dieser Veränderungen ausdrucken, werden ebenfalls nach Graden oder Ordnungen gezählet. Eine Gleichung, wo nur Veränderungen von der ersten Ordnung vorkommen, als Δx, Δy, Δz, ist von der ersten Ordnung oder vom ersten Grade. Wenn $\Delta^2 x$, $\Delta^2 y$, u. s. f. in der Gleichung enthalten sind, so ist sie vom zweiten Grade oder von der zweiten Ordnung.

Uebrigens werden die höheren Veränderungen entweder durch die Wiederholung des Δ oder durch ein einziges Δ mit einer kleinen Ziffer neben bei angedeutet. Also sind die auf einander folgenden Veränderungen von z.

Δz, $\Delta\Delta z$, $\Delta\Delta\Delta z$, $\Delta\Delta\Delta\Delta z$, u. s. f.
oder Δz, $\Delta^2 z$, Δ^3, Δ^4, u. s. f.

Man

Man hüte sich, diese kleine Ziffern mit den Exponenten der Potenzen zu verwechseln.

$\Delta^4 z$, heißt die vierte Veränderung von z.

$(\Delta z)^4$ oder Δz^4, heißt die vierte Potenz von Δz.

$\Delta(z^4)$, heißt die Veränderung von z^4.

§. 12.

Aufgabe.

Die dritte Veränderung einer Funkzion finden.

Auflösung. Man suche erstlich die zweite Veränderung. Wenn diese gefunden, so setze man darin

$z + \Delta z$ anstatt z

$\Delta z + \Delta^2 z$ anstatt Δz

$\Delta^2 z + \Delta^3 z$ anstatt $\Delta^2 z$

und eben so vergrößere man alle veränderliche Größen, sowohl als ihre erste und zweite Veränderungen. Hernach subtrahire man die zweite Veränderung, so bleibet die dritte.

Beisp. Es sei verlanget die dritte Veränderung von xy, man setze $z = xy$, so bekommt man (§. 9.)

$\Delta^2 z = 2\Delta x\Delta y + y\Delta^2 x + x\Delta^2 y + 2\Delta x\Delta^2 y + 2\Delta y\Delta^2 x + \Delta^2 x\Delta^2 y$

Man vergrößere nun gehöriger maßen alle veränderliche Quantitäten und ihre Veränderungen.

$\Delta^2 z$ wird $\Delta^2 z + \Delta^3 z$

$2\Delta x\Delta y$ wird $2(\Delta x + \Delta^2 x)(\Delta y + \Delta^2 y) = 2\Delta x\Delta y + 2\Delta x\Delta^2 y + 2\Delta y\Delta^2 x + 2\Delta^2 x\Delta^2 y$

$y\Delta^2 x$ wird $(y + \Delta y)(\Delta^2 x + \Delta^3 x) = y\Delta^2 x + y\Delta^3 x + \Delta y\Delta^2 x + \Delta y\Delta^3 x$

$x\Delta^2 y$ wird $(x + \Delta x)(\Delta^2 y + \Delta^3 x) = x\Delta^3 y + x\Delta^2 y + \Delta x\Delta^2 y + \Delta x\Delta^3 y$

$2\Delta x\Delta^2 y$ wird $2(\Delta x + \Delta^2 x)(\Delta^2 y + \Delta^3 y) = 2\Delta x\Delta^2 y + 2\Delta x\Delta^3 y + 2\Delta^2 x\Delta^2 y + 2\Delta^2 x\Delta^3 y$

$2\Delta y\Delta^2 x$ wird $2(\Delta y + \Delta^2 y)(\Delta^2 x + \Delta^3 y) = 2\Delta y\Delta^2 x + 2\Delta y\Delta^3 x + 2\Delta^2 y\Delta^2 x + 2\Delta^3 y^3\Delta x$

$\Delta^2 x\Delta^2 y$ wird $(\Delta^2 x + \Delta^3 x)(\Delta^2 y + \Delta^3 y) = \Delta^2 x\Delta^2 y + \Delta^2 x\Delta^3 y + \Delta^2 y\Delta^3 x + \Delta^3 x\Delta^3 y$

Es muß also sein.

$$\Delta^2 z + \Delta^1 z = 2\Delta x\Delta y + 5\Delta x\Delta^2 y + 5\Delta y\Delta^2 x + 7\Delta^2 x\Delta^2 y + y\Delta^2 x + y\Delta^3 y + 3\Delta y\Delta^1 x + x\Delta^2 y + x\Delta^3 y + 3\Delta x\Delta^3 y + 3\Delta^2 x\Delta^3 y + 3\Delta^2 y\Delta^3 x + \Delta^3 x\Delta^3 y$$

Hiervon ziehe man ab

$$\Delta^2 z = 2\Delta x\Delta y + y\Delta^2 x + x\Delta^2 y + 2\Delta x\Delta^2 y + 2\Delta y\Delta^2 x + \Delta^2 x\Delta^2 y$$

so wird bleiben

$$\Delta^3 z = 3\Delta x\Delta^2 y + 3\Delta y\Delta^2 x + 6\Delta^2 x\Delta^2 y + y\Delta^3 x + 3\Delta y\Delta^3 x + x\Delta^3 y + 3\Delta x\Delta^3 y + 3\Delta^2 x\Delta^3 y + 3\Delta^2 y\Delta^3 x + \Delta^3 x\Delta^3 y$$

Beweis. Wir wollen setzen, eine veränderliche Größe nehme folgender maßen zu: Sie sei erstlich z, und werde $z + \Delta z$, hernach $z + 2\Delta z + \Delta^2 z$, weiter $z + 3\Delta z + 3\Delta^2 z + \Delta^3 z$. So entstehen die Veränderungen folgendermaßen:

	1ste Veränderungen.	2te Ver.	3te V.
z	Δz	$\Delta^2 z$	$\Delta^3 z$
$z + \Delta z$	$\Delta z + \Delta^2 z$	$\Delta^2 z + \Delta^3 z$	
$z + 2\Delta z + \Delta^2 z$	$\Delta z + 2\Delta^2 z + \Delta^3 z$		
$z + 3\Delta z + 3\Delta^2 z + \Delta^3 z$			

Hier hat man die ersten Veränderungen gefunden, indem man jeden folgenden Werth der veränderlichen Größe von dem vorhergehenden abgezogen hat. Die zweite Veränderung hat man gefunden, indem man eben so mit den ersten Veränderungen verfahren ist. Die dritte Veränderung ist auch auf die nämliche Art entstanden.

Daraus siehet man zugleich, daß wenn man die dritte Veränderung finden will, angenommen werden muß, daß die veränderlichen Größen eben so, wie hier z, nach und nach zunehmen. Gesetzt also, es ist die dritte Veränderung von $z = xy$ verlanget, so entstehet bei dem dritten Zuwachs der Größen

$$z + 3\Delta z + 3\Delta^2 z + \Delta^3 z = (x + 3\Delta x + 3\Delta^2 x + \Delta^3 x).(y + 3\Delta y + 3\Delta^2 y\Delta^3 y)$$

Hier-

Hiervon ziehe man ab

I) $3\Delta^2 z = 3(x+2\Delta x+\Delta^2 x)(y+2\Delta y+\Delta^2 y)-6(x+\Delta x)(y+\Delta y)+3xy$ (§. 9)

II) $3\Delta z = \ldots\ldots\ldots 3(x+\Delta x)(y+\Delta y)-3xy$

III) $z = \ldots\ldots\ldots xy$

$z+3\Delta z+3\Delta^2 z = 3(x+2\Delta x+\Delta^2 x)\cdot(y+2\Delta y+\Delta^2 y)-3(x+\Delta x)(y+\Delta y)+xy$

so bleibet übrig

$\Delta^3 z = (x+3\Delta x+3\Delta^2 x+\Delta^3 x)\cdot(y+3\Delta y+3\Delta^2 y+\Delta^3 y)-3(x+2\Delta y+\Delta^2 x)(y+2\Delta y+\Delta^2 y)+3(x+\Delta x)(y+\Delta y)-xy$

Nun verfahre man nach der gewöhnlichen Regel. Nämlich man nehme die zweite Veränderung (§. 9).

$\Delta^2 z = (x+2\Delta x+\Delta^2 x)(y+2\Delta^2 y)-2(x+\Delta x)(y+\Delta y)+xy$

Man setze darin

$\Delta^2 z+\Delta^3 z$ anstatt $\Delta^2 z$
$x+\Delta x$ anstatt x
$\Delta x+\Delta^2 x$ anstatt Δx
$\Delta^2 x+\Delta^3 x$ anstatt $\Delta^2 x$
$y+\Delta y$ anstatt y
$\Delta y+\Delta^2 y$ anstatt Δy
$\Delta^2 y+\Delta^3 y$ anstatt $\Delta^2 y$

so bekommt man

$\Delta^2 z+\Delta^3 z = (x+3\Delta x+3\Delta^2 x+\Delta^3 x)(y+3\Delta y+3\Delta^2 y+\Delta^3 y)-2(x+2\Delta x+\Delta^2 x)(y+2\Delta y+\Delta^2 y)+(x+\Delta x)(y+\Delta y)$

Hiervon ziehe man die zweite Veränderung ab, das ist,

$\Delta^2 z = (x+2\Delta x+\Delta^2 x)(y+2\Delta y+\Delta^2 y)-2(x+\Delta x)(y+\Delta y)+xy$

so wird übrig bleiben

$\Delta^3 z = (x+3\Delta x+3\Delta^2 x+\Delta^3 x)(y+3\Delta y+3\Delta^2 y+\Delta^3 y)-3(x+2\Delta x+\Delta^2 x)(y+2\Delta y+\Delta^2 y)+3(x+\Delta x)(y+\Delta y)-xy.$

Dieser Werth von $\Delta^3 z$ ist vollkommen demjenigen gleich, welcher vorher durch den Beweis gefunden wurde. Also hat die Regel ihre völlige Richtigkeit.

Zusatz. Will man annehmen, daß eine von den veränderlichen Größen immer gleichförmig zunimmt, so werden ihre zweite, dritte, und überhaupt alle höhere Veränderungen derselben o oder nichts. Die erste Veränderung derselben kann als beständig angesehen werden. Z. B. Gesetzt, eine Größe x nimmt beständig um Δx zu, so ist sie

		1ste Veränd.	2te Veränd.	3te Veränd.
erstlich	x			
hernach	$x+\Delta x$	Δx	o	
ferner	$x+2\Delta x$	Δx	o	o
ferner	$x+3\Delta x$	Δx		
	&c. &c.			

Gesetzet also, man hat in der Veränderung einer Funkzion Δx als veränderlich angesehen: will man nun, daß Δx beständig bleiben soll, so muß man alle Glieder ausstreichen, welche $\Delta^2 x$, $\Delta^3 x$ enthalten. Z. B. Nachdem man gefunden hat

$$\Delta^3 z = 3\Delta x\Delta^2 y + 3\Delta y\Delta^2 x + 6\Delta^2 x\Delta^2 y + y\Delta^3 x + 3\Delta y\Delta^3 x + x\Delta^3 y + 3\Delta x\Delta^3 y + 3\Delta^2 x\Delta^3 y + 3\Delta^2 y\Delta^3 x + \Delta^3 x\Delta^3 y$$

so bekommt man, wenn Δx unveränderlich ist,

$$\Delta^3 z = 3\Delta x\Delta^2 y + x\Delta^3 y + 3\Delta x\Delta^3 y$$

oder wenn Δy, unveränderlich ist,

$$\Delta^3 z = 3\Delta y\Delta^2 x + y\Delta^3 x + 3\Delta y\Delta^2 x$$

Man kann auch sogleich bei der zweiten und dritten Veränderung der Funkzion Δx oder Δy unverändert lassen. Z. B. Wenn Δx beständig sein soll, und man soll die dritte Veränderung von $z = xy$ suchen, so suche man anfänglich die erste, welche sein wird

$$\Delta z = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$$

Nun vergrößere man Δz, y, Δy, und x, aber nicht Δx, so entstehet

$$\Delta z + \Delta^2 z$$

$$\Delta z + \Delta^2 z = (x+\Delta x)(\Delta y + \Delta^2 y) + (y+\Delta y)\Delta x + \Delta x(\Delta y + \Delta^2 y)$$

oder $\Delta z + \Delta^2 z = x\Delta y + y\Delta x + 3\Delta x\Delta y + x\Delta^2 y + 2\Delta x\Delta^2 y$

abgez. $\Delta z \ldots = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$

bleibet $\Delta^2 z = \ldots\ldots\ldots 2\Delta x\Delta y + x\Delta^2 y + 2\Delta x\Delta^2 y$

Man lasse wiederum Δx unverändert, und vergrößere nur $\Delta^2 z$, x, Δy, und $\Delta^2 y$, so kommt

$$\Delta^2 z + \Delta^3 z = 2\Delta x(\Delta y + \Delta^2 y) + (x+\Delta x)(\Delta^2 y + \Delta^3 y) + 2\Delta x(\Delta^2 y + \Delta^3 y)$$

oder $\Delta^2 z + \Delta^3 z = 2\Delta x\Delta y + x\Delta^2 y + 5\Delta x\Delta^2 y + x\Delta^3 y + 3\Delta x\Delta^3 y$

abgez. $\Delta^2 z \ldots = 2\Delta x\Delta y + x\Delta^2 y + 2\Delta x\Delta^2 y$

bleibet $\ldots\Delta^3 = \ldots\ldots 3\Delta x\Delta^2 y + x\Delta^3 y + 3\Delta x\Delta^3 y$

§. 13.

Aufgabe.

Die *n*te Veränderung einer Funkzion finden.

Auflösung. Man suche erstlich die $(n-1)$te Veränderung. In dieser vergrößere man sowohl die veränderlichen Größen, als ihre schon vorhandenen Veränderungen, nämlich man setze

$x + \Delta x$ anstatt x

$\Delta^m x + \Delta^{m+1} x$ anstatt $\Delta^m x$

indem hier unter m jede Zahl verstanden wird, welche die Ordnung der Veränderung anzeiget, und unter x jede veränderliche Größe.

Wenn dieses geschehen ist, so ziehe man die $(n-1)$ Veränderung ab. Was übrig bleibet, ist die *n*te Veränderung.

Wenn die erste Veränderung einer veränderlichen Größe in der Funkzion als beständig angesehen werden soll, so wird diese Veränderung nicht mehr vergrößert, sondern sie bleibet wie sie ist.

Beispiel. Laßt uns die vierte Veränderung suchen

von

von $z = xy$, indem wir Δx als beständig annehmen. Die dritte Veränderung war.

$$\Delta^3 z = 3\Delta x \Delta^2 y + x\Delta^3 y + 3\Delta x \Delta^3 y$$

Daraus entstehet, wenn man alles Veränderliche vergrößert,

$$\Delta^3 z + \Delta^4 z = 3\Delta x(\Delta^2 y + \Delta^3 y) + (x + \Delta x)(\Delta^3 y + \Delta^4 y) + 3\Delta x(\Delta^3 y + \Delta^4 y)$$

oder $\Delta^3 z + \Delta^4 z = 3\Delta x \Delta^2 y + x\Delta^3 y + 7\Delta x \Delta^3 y + x\Delta^4 y + 4\Delta x \Delta^4 y$

abgez. $\Delta^3 z \quad . \quad = 3\Delta x \Delta^2 y + x\Delta^3 y + 3\Delta x \Delta^3 y$

bleibet $\Delta^4 z = \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4\Delta x \Delta^3 y + x\Delta^4 y + 4\Delta x \Delta^4 y$

Beweis. Der Beweis kann für jeden Grad insbesondere ungefähr wie beim dritten geführet werden; wenn man nur annimmt, daß jede veränderliche Größe folgendermaßen zunimmt:

Erstlich ist sie z
hernach wird sie $z + \Delta z$
ferner $z + 2\Delta z + \Delta^2 z$
$z + 3\Delta z + 3\Delta^2 z + \Delta^3 z$
$z + 4\Delta z + 6\Delta^2 z + 4\Delta^3 z + \Delta^4 z$
$z + 5\Delta z + 10\Delta^2 z + 10\Delta^3 z + 5\Delta^4 z + \Delta^5 z$.
&c. &c.

Die Koeffizienten folgen hier in der nämlichen Ordnung, wie bei den Potenzen zweitheiliger Größen.

Anmerkung I. Gleichungen werden eben so behandelt, wie Funkzionen. Man kann auch zu jedem Gliede der Gleichung besonders die Veränderung suchen, wie schon beim ersten Grade angemerket worden.

Anmerkung II. Wir haben immer vorausgesetzet, daß die veränderlichen Größen alle zunehmen. Sollen einige abnehmen, so darf man nur in der gefundenen Ver-

Veränderung der Funkzion vor jedem Gliede, worin die verneinte Veränderung enthalten ist, das Zeichen vertauschen. Jedoch nehme man den Fall aus, wo die verneinten Veränderungen eine paarige Anzahl von Ausmessungen haben. In diesem Falle behält das Glied sein Zeichen, wie aus der Multiplikazion bekannt ist. Z. B. Man hat gefunden

$$\Delta^4 z = 4\Delta x\Delta^3 y + x\Delta^4 y + 4\Delta x\Delta^4 y$$

Soll nun x abnehmen, anstatt vergrößert zu werden, so wird Δx verneinet, und man bekommt

$$\Delta^4 z = -4\Delta x\Delta^3 y + x\Delta^4 y - 4\Delta x\Delta^4 y$$

Soll hingegen x zunehmen und y abnehmen, so werden $\Delta^3 y$, $\Delta^4 y$ verneinte Größen, und

$$\Delta^4 z = -4\Delta x\Delta^3 y - x\Delta^4 y - 4\Delta x\Delta^4 y$$

Sollen x und y beide abnehmen, so werden die Veränderungen von x und y verneinet, und

$$\Delta^4 z = +4\Delta x\Delta^3 y - x\Delta^4 y + 4\Delta x\Delta^4 y$$

Hier ist $4\Delta x\Delta^3 y$ bejahet, weil $(-\Delta x)\times(-\Delta^3 y) = +\Delta x\Delta^3 y$. Aus der nämlichen Ursache ist das letzte Glied bejahet.

Ob die Veränderung der Funkzion selbst, als hier $\Delta^4 z$, bejahet oder verneinet sein soll, muß man nicht vorher bestimmen. Dieses hänget von der Zunahme und Abnahme der veränderlichen Größen ab. Z. B. Da wir für den Fall, wo Δx beständig und Δy verneinet ist, gefunden haben

$$\Delta^4 z = -4\Delta x\Delta^3 y - x\Delta^4 y - 4\Delta x\Delta^4 y$$

so siehet man, daß die vierte Veränderung von xy in diesem Falle einen verneinten Werth bekommt.

§. 14.

Die erste Veränderung einer Funkzion einer einzigen ver-

veränderlichen Größe x, kann allemal durch eine Reihe von folgender Gestalt vorgestellet werden:

$$+A+B\Delta x^2+C\Delta x^3+D\Delta x^4+E x^5+\&c.$$

wo die Koeffizienten A, B, C, D, E, &c. nicht, wie sonst gewöhnlich, beständige Größen, sondern Funkzionen von x bedeuten.

Denn es kann die Veränderung der Funkzion nichts anders sein als eine Funkzion von Δx, x, und bekannten Größen. Siehet man nur allein auf Δx, und behandelt x als eine bekannte oder beständige Größe, so hat man eine bloße Funkzion von Δx und beständigen Größen. Diese Funkzion von Δx kann nun, vermöge des 17ten Paragraphs im vorigen Hauptstücke in eine Reihe verwandelt werden, welche die obgemeldete Gestalt hat.

Es sei gegeben diese Funkzion

$$\frac{x}{1+2x}.$$

Wenn man x um Δx vergrößert, und dann die gegebene Funkzion abziehet, so kommt für die erste Veränderung

$$\frac{x+\Delta x}{(1+2x)+2\Delta x}-\frac{x}{1+2x}$$

Man setze nun, es sei

$$\frac{x+\Delta x}{(1+2x)+2\Delta x}=A+B\Delta x+C\Delta x^2+\&c.$$

Multipliziret man beiderseits mit dem Nenner, so wird

$$x+1\Delta x=(1+2x)A+(1+2x)B\Delta x+(1+2x)C\Delta x^2+\&c.$$
$$+2A\Delta x \quad +2B\Delta x^2+\&c.$$

Vergleichet man nun die unbestimmten und veränderlichen Koeffizienten, so muß sein

$x=$

$$x = (1+2x)\,A$$
$$1 = (1+2x)\,B + 2A$$
$$0 = (1+2x)\,C + 2B$$
$$\&c. \quad \&c.$$

Daher bekommt man

$$A = \frac{x}{1+2x}$$

$$B = \frac{1}{(1+2x)^2}$$

$$C = \frac{-2}{(1+2x)^3}$$

Folglich ist

$$\frac{x+\Delta x}{1+2x+2\Delta x} = \frac{x}{1+2x} + \frac{1}{(1+2x)^2}\Delta x - \frac{2}{(1+2x)^3}\Delta x^2 + \&c.$$

und wenn man beiderseits $\frac{x}{1+2x}$ abziehet

$$\frac{x+\Delta x}{1+2x+2\Delta x} - \frac{x}{1+2x} = \frac{1}{(1+2x)^2}\Delta x - \frac{2}{(1+2x)^3}\Delta x^2 + \&c.$$

oder auch

$$\Delta\left(\frac{x}{1+2x}\right) = \frac{1}{(1+2x)^2}\Delta x - \frac{2}{(1+2x)^3}\Delta x^2 + \&c.$$

Auf eine ähnliche Art kann man allemal in dergleichen Fällen verfahren, um die Veränderung durch eine unendliche Reihe auszudrucken.

Das zweideutige Zeichen $\pm$ in der Formel zeiget an, daß, wenn x abnehmen und folglich Δx verneinet sein soll, die Zeichen in den Gliedern, wo unpaarige Exponenten sind, verändert werden müssen.

§. 15.

§. 15.

Wenn von einer ungleichartigen Funkzion zweier veränderlicher Größen x und y, die Veränderung genommen wird, so enthält diese Veränderung der Funkzion: I) Eine ungleichartige Funkzion von Δx, und Δy, die um einen Grad niedriger ist, und deren Koeffizienten wiederum Funkzionen von x und y sind. II) Eine gleichartige Funkzion von Δx und Δy, welche vom nämlichen Grade ist, als die gegebene, und die nämlichen Koeffizienten hat.

Es sei gegeben folgende ungleichartige Funkzion vom dritten Grade:

$$\alpha+\beta x+\gamma y+\delta x^2+\varepsilon xy+\zeta y^2+\eta x^3+\theta x^2y+\iota xy^2+\varkappa y^3$$

Wenn ihr von dieser Funkzion der Größen x und y die Veränderung suchet, und die Glieder zusammen bringet, welche mit den nämlichen Veränderungen multipliziret sind, so bekommet ihr

$$\begin{aligned}&(\beta+2\delta x+\varepsilon y+3\eta x^2+2\theta xy+\iota y^2)\,\Delta x\\+&(\gamma+\varepsilon x+2\zeta y+\theta x^2+2\iota xy+3\varkappa y^2)\,\Delta y\\+&(\delta+3\eta x+\theta y)\,\Delta x^2\\+&(\varepsilon+2\theta x+2\iota y)\,\Delta x\Delta y\\+&(\zeta+\iota x+3\varkappa y)\,\Delta y^2\\+&\eta\Delta x^3\\+&\theta\Delta x^2\Delta y\\+&\iota\Delta y^2\Delta x\\+&\varkappa\Delta y^3\end{aligned}$$

Benennet man nun mit A, B, C, &c. s. f. die Funkzionen, welche hier in Haken eingeschlossen sind, so hat man zum Unterschiede

$$\begin{aligned}&A\Delta x+B\Delta y+C\Delta x^2+D\Delta x\Delta y+E\Delta y^2\\+&\eta\Delta x^3+\theta\Delta x^2\Delta y+\iota\Delta y^2\Delta x+\varkappa\Delta y^3\end{aligned}$$

Ueberhaupt, wenn die gegebene ungleichartige Funkzion vom

vom $n$ten Grade ist, so bekommt die Veränderung folgende Gestalt:

$$A\Delta x + B\Delta y + C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + \&c.\ \&c.\ldots. K\Delta y^{n-1} + a\Delta x^n + b\Delta x^{n-1}\Delta y + c\Delta x^{n-2}\Delta y^2 + \&c.\ \&c.\ldots. k\Delta y^n$$

Hier sind A, B, C, D, &c. K, lauter Funkzionen von x und y. Hingegen a, b, c, &c. k, sind die letzten Koeffizienten der Funkzion, nämlich die Koeffizienten, welche die Glieder in der Funkzion haben, wenn man x anstatt Δx und y anstatt Δy setzet.

§. 16.

Wenn man von einer ganzen und schlichten Funkzion der Größe x die Veränderungen nimmt, und Δx als beständig betrachtet, so gehen die Veränderungen nur bis zum $n$ten Grade, wenn die Funkzion selbst von der $n$ten Ordnung ist. Die Veränderung vom $(n+1)$ten Grade, wie auch alle folgenden, sind null.

Es sei $y = x^n$, so wird, wenn Δx als beständig angesehen wird,

$$\Delta y = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1.\ 2.}x^{n-2}\Delta x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.}x^{n-3}\Delta x^3 + \&c.$$

$$\Delta^2 y = n(n-1)x^{n-2}\Delta x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.}6x^{n-3}\Delta x^3 + \&c.$$

$$\Delta^3 y = n(n-1)(n-2)x^{n-3}\Delta x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}36x^{n-4}\Delta x^4$$

$$\Delta^4 y = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}\Delta x^4 + \&c.$$

Man wird leicht einsehen, daß diese auf einander folgende Veränderungen nicht weiter als bis zur $n$ten Veränderung gehen können. Gesetzt, es sei $y = x^3$, so wird

$$\Delta^3 y = 3(3-1)(3-2)x^{3-3}\Delta x^3 = 6\Delta x^3$$

Es müste nun sein

$$\Delta^4 y = 3(3-1)(3-2)(3-3)x^{3-4}\Delta x^4 + \&c.$$

Da hier $3 - 3 = 0$, so wird der ganze Ausdruck zu nichts. Weil aber dieses $3 - 3$ in allen folgenden und höheren Veränderungen vorkommt, so sind sie alle ebenfalls null.

Jede ganze und schlichte Funkzion kann also vorgestellet werden:

$$a + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \&c. \ldots . + \varkappa x^n$$

wenn sie nämlich von der $n$ten Ordnung ist. Wenn man von allen Gliedern dieser Funkzion nach und nach die Veränderungen suchet, so siehet man aus vorigem Beispiele, daß βx keine Veränderung über die erste haben kann, γx^2 keine über die zweite, δx^3 keine über die dritte, u. s. f. endlich $\varkappa x^n$ keine über die $n$te. Also kann die ganze Funkzion keine Veränderung über den $n$ten Grad haben.

Funfzehntes Hauptstück.

Von der Erfindung der Funkzionen aus ihren Veränderungen, und von den Reihen.

§. 1.

Nachdem wir im vorigen Hauptstücke gelehret haben, wie man die Veränderung einer jeden Funkzion finden kann, so müssen wir jetzt auch zeigen, wie man die Funkzion wieder finden kann, woraus eine gegebene Veränderung entstanden ist. Aber dieser Theil der höheren Rechenkunst ist weit schwerer, als der vorige; oder es ist vielmehr diese Rechnungs Art eine beinahe ganz neue Kunst, worinn noch vieles zu entdecken ist. Wir wollen dem Leser das Nöthigste daraus mittheilen.

§. 2.

Die Summe einer Funkzion, worinn Veränderungen vorkommen, heißet so viel, als eine Funkzion, woraus die gegebene Veränderungs-Funkzion entstanden ist oder entstehen kann. Diese Summe wird angedeutet durch den griechischen Buchstaben Σ. Folglich bedeutet dieser Ausdruck

$$\Sigma(\Delta x y + y\Delta x + \Delta x \Delta y)$$

die Summe von $x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$, das ist, eine Funkzion von x und y woraus $x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$ entstehet, wenn man ihre Veränderung nimmt. In dem ange-

führten Beispiele ist es aus dem vorhergehenden klar, daß die verlangte Summe in der Funkzion xy bestehet, also ist

$$\Sigma(x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y) = xy$$

§. 3.

Die Zeichen Σ und Δ heben einander auf, und verschwinden beide, wenn sie neben einander vor der nämlichen Größe stehen. Z. B.

$$\Delta\Sigma(x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y) = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$$
$$\Sigma\Delta(xy) = xy$$

In der ersten dieser beiden Gleichungen ist

$$\Sigma(x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y) = xy \quad (\S.\ 2)$$

Nimmt man beiderseits die Veränderungen, so kommt

$$\Delta\Sigma(x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y) = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$$

wo man siehet, daß Δ und Σ einander aufheben. In der anderen Gleichung ist

$$\Delta(xy) = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$$

nimmt man nun beiderseits die Summe, so ist

$$\Sigma\Delta(xy) = xy$$

wo die Zeichen Σ und Δ wiederum einander aufheben.

Anmerkung. Man verwechsle die Bedeutung, welche das Wort Summe in der Lehre von den Funkzionen annimmt, nicht mit dem Sinne den es sonst in der Arithmetik und Algebra zu haben pfleget. Die Erfinder hätten freilich behutsamer sein können, um solche zweideutige Wörter zu vermeiden. Weil sie aber schon eingeführet sind, so laßen sie sich nicht gut aus dem Gebrauche bringen. Wir wollen in diesem Hauptstücke allemal das Wort Aggregat gebrauchen, wenn von der gewöhnlichen arithmetischen oder algebraischen Addizion die Rede sein wird.

§. 4.

§. 4.

Die Veränderung einer Funkzion entstehet, indem man für jeden Satz insbesondere die Veränderung suchet. Wenn also die Summe einer Veränderungs-Funkzion, oder Veränderungs-Gleichung gefunden werden soll, so kann man ebenfalls die Summe eines jeden Gliedes für sich suchen. Gesetzet also, man habe eine solche Veränderungs-Gleichung vor sich

$$\Delta u + \Delta x = \Delta y - \Delta z$$

so kann die Summe geschrieben werden

$$\Sigma(\Delta u + \Delta x) = \Sigma(\Delta y - \Delta z)$$

oder, indem man das Zeichen Σ vor jedes Glied schreibet

$$\Sigma\Delta u + \Sigma\Delta x = \Sigma\Delta y - \Sigma\Delta z$$

welches in diesem Falle eben so viel wäre, als

$$u + x = y - z$$

Siehe §. 3.

§. 5.

Wenn in einem Produkte beständige Größen vorkommen, so kann man bemerken, daß es gleich viel ist, ob man die beständigen Größen hinter oder vor das Zeichen Δ schreibe. Es ist z. B.

$$\Delta ax = a\Delta x$$

$$\Delta axy = a\Delta xy = a(x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y)$$

$$\Delta\frac{x}{a} \text{ oder } \Delta\frac{1}{a}x = \frac{1}{a}\Delta x \text{ oder } \frac{\Delta x}{a}$$

Hieraus folget, daß in der Summe die beständigen Faktoren sowohl vor als nach dem Zeichen Σ stehen können. Z. B.

$$\Sigma\Delta ax = \Sigma a\Delta x = a\Sigma\Delta x = ax$$

$$\Sigma\Delta axy = \Sigma a\Delta xy = a\Sigma\Delta xy = axy$$

$$\Sigma\Delta\frac{1}{a}x = \Sigma\frac{1}{a}\Delta x = \frac{1}{a}\Sigma\Delta x = \frac{1}{a}x$$

&c. &c.

§. 6.

Aufgabe.

Die Summe von Δx^n finden, indem man weiß, daß Δx als beständig angesehen wird.

Auflösung. Es ist allemal

$$\Sigma(\Delta x^n) = x\Delta x^{n-1},$$

Beispiel.

$$\Sigma\Delta x^4 = x\Delta x^3$$
$$\Sigma\Delta x^7 = x\Delta x^6$$

Beweis. Man nehme die Funkzion $x \cdot \Delta x^{n-1}$, und suche ihre Veränderung, indem man $x + \Delta x$ anstatt x schreibet, und Δx unverändert läßt, hernach aber die gegebene Funkzion abziehet.

$$(x+\Delta x)\Delta x^{n-1} = x\Delta x^{n-1} + \Delta x^n$$
abgez. $x\Delta x^{n-1}$
bleibet . . . . Δx^n

Es ist also Δx^n die Veränderung von $x\Delta x^{n-1}$, folglich ist $x\Delta x^{n-1}$ die Summe von Δx^n.

Anmerkung. Man muß sich nicht wundern, daß die Summe einer Veränderungs-Funkzion wiederum eine Veränderungs-Funkzion werden kann. Denn eben so, wie zu einer Funkzion mehr als einmal die Veränderung gesuchet werden kann, so kann auch, wenn man rückwärts gehet, mehr als einmal die Summe gesuchet werden. Z. B. Wir haben im vorigen Hauptstücke gefunden, wenn Δx als als beständig betrachtet wird

$$\Delta(xy) = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$$
$$\Delta^2(xy) = 2\Delta x\Delta y + x\Delta^2 y + 2\Delta x\Delta^2 y$$
$$\Delta^3(xy) = 3\Delta x\Delta^2 y + x\Delta^3 y + 3\Delta x\Delta^3 y$$
$$\Delta^4(xy) = 4\Delta x\Delta^3 y + x\Delta^4 y + 4\Delta x\Delta^4 y$$

Wür-

Würde nun die Summe verlanget von

$$4\Delta x\Delta^3 y + x\Delta^4 y + 4\Delta x\Delta^4 y$$

oder die Funkzion wovon dieſe Funkzion die Veränderung iſt, ſo könnte, wenn Δx als beſtändig betrachtet wird, die verlangte Summe nichts anders ſein, als die vorige Veränderung, nämlich

$$3\Delta x\Delta^2 y + x\Delta^3 y + 3\Delta x\Delta^3 y$$

Hiervon wäre wiederum die Summe

$$2\Delta x\Delta y + x\Delta^2 y + 2\Delta x\Delta^2 y$$

und hiervon die Summe

$$x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$$

Endlich hiervon die Summe

$$xy$$

Wenn alſo eine Veränderung von der *n*ten Ordnung gegeben iſt, ſo muß auch *n*mal die Summe geſuchet werden, bis daß man auf die erſte Funkzion kommt, welche keine Veränderungen enthält.

§. 7.

Aufgabe.

Die Summe von $x^n\Delta x$ finden.

Auflöſung. Man gebrauche folgende Formeln

$$\Sigma(x\Delta x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x\Delta x}{2}$$

$$\Sigma(x^2\Delta x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2\Delta x}{2} + \frac{x\Delta x^2}{6}$$

$$\Sigma(x^3\Delta x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3\Delta x}{3} + \frac{x^2\Delta x^2}{4}$$

&c. &c.

Beweis. Die erste Formel wird also bewiesen. Wenn man von x^2 die Veränderung nimmt, so kommt

$$\Delta(x^2) = 2x\Delta x + \Delta x^2$$

Man nehme die Summen, so kommt

$$x^2 = 2\Sigma x\Delta x + \Sigma\Delta x^2$$

daher $x^2 - \Sigma\Delta x^2 = 2\Sigma x\Delta x$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{\Sigma\Delta x^2}{2} = \Sigma x\Delta x$$

Es ist aber vermöge voriger Aufgabe $\Sigma\Delta x^2 = x\Delta x$, folglich

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x\Delta x}{2} = \Sigma(x\Delta x)$$

welches die erste Formel ist. Die zweite Formel wird auf ähnliche Art gefunden: es ist

$$\Delta(x^3) = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$$

Wenn man die Summen nimmt, so kommt

$$x^2 = 3\Sigma x^2\Delta x + 3\Sigma x\Delta x^2 + x\Delta x^2$$

Um das Glied $3\Sigma x\Delta x^2$ zu finden, betrachte man, daß Δx als beständig angesehen wird. Also ist $3\Sigma x\Delta x^2$ oder $3\Sigma x\Delta x\Delta x = 3\Delta x.\Sigma x\Delta x$. Es ist aber aus voriger Formel $\Sigma x\Delta x = \frac{x^2}{2} - \frac{x\Delta x}{2}$, folgl. $3\Delta x\Sigma x\Delta x = \frac{3x^2\Delta x}{2} - \frac{3x\Delta x^2}{2}$

Setzet man diesen Werth in die letzte Gleichung, so kommt

$$x^3 = 3\Sigma x^2\Delta x + \frac{3x^2\Delta x}{2} - \frac{3x\Delta x^2}{2} + x\Delta x^2$$

oder $2x^3 = 6\Sigma x^2\Delta x + 3x^2\Delta x - 2x\Delta x^2 + 2x\Delta x^2$

oder $2x^3 = 6\Sigma x^2\Delta x + 3x^2\Delta x - x\Delta x^2$

daher $2x^3 - 3x^2\Delta x + x\Delta x^2 = 6\Sigma x^2\Delta x$

und $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2\Delta x}{2} + \frac{x\Delta x^2}{6} = \Sigma x^2\Delta x$

Um

Um die dritte Formel zu finden, betrachte man, daß

$$\Delta(x^4) = 4x^3\Delta x + 6x^2\Delta x^2 + 4x\Delta x^3 + \Delta x^4$$

Man suche die Summen der Glieder

I) $\Sigma\Delta(x^4) = x^4$

II) $\Sigma 4x^3\Delta x = 4\Sigma x^3\Delta x$

III) $6\Sigma x^2\Delta x^2 = 6\Delta x\Sigma x^2\Delta x$. Da aus voriger Formel $\Sigma x^2\Delta x$ gefunden worden, so darf man dieselbe nur mit $6\Delta x$ multiplizieren, und man bekommt $2x^3\Delta x - 3x^2\Delta x^2 + x\Delta x^3$

IV) $4\Sigma x\Delta x^3 = 4\Delta x^2\Sigma x\Delta x$. Da aus der ersten Formel $\Sigma x\Delta x$ gefunden worden, so multiplizire man noch jene Formel mit $4\Delta x^2$, so hat man $2x^2\Delta x^2 - 2x\Delta x^3$

V) $\Sigma\Delta x^4 = x\Delta x^3$, aus voriger Aufgabe.

Setzet man nun alle diese Summen zusammen, so wird

$$\begin{array}{r} x^4 = 4\Sigma x^3\Delta x + 2x^3\Delta x - 3x^2\Delta x^2 + x\Delta x^3 \\ + 2x^2\Delta x^2 - 2x\Delta x^3 \\ x\Delta x^3 \\ \hline x^4 = 4\Sigma x^3\Delta x + 2x^3\Delta x - x^2\Delta x^2 \end{array}$$

oder $x^4 - 2x^3\Delta x + x^2\Delta x^2 = 4\Sigma x^3\Delta x$

oder $\frac{x^4}{4} - \frac{x^3\Delta x}{2} + \frac{x^2\Delta x^2}{4} = \Sigma x^3\Delta x$

Auf eine ähnliche Art ließen sich die Formeln und deren Beweise weiter fortsetzen.

§. 8.

Aufgabe.

Die Summe von Δx^n und $x^n\Delta x$ finden, in dem Falle wo $\Delta x = 1$.

Auflösung. Man bediene sich der Formeln die in beiden vorigen Aufgaben angeführet worden, und setze in denselben allenthalben 1 für Δx. Auf diese Art bekommt man die gehörigen Formeln.

Weil

$$\Sigma \Delta x^n = x\Delta x^{n-1}$$

$$\Sigma x\Delta x = \frac{x^2}{2} - \frac{x\Delta x}{2}$$

$$\Sigma x^2\Delta x = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2\Delta x}{2} + \frac{x\Delta x^2}{6}$$

$$\Sigma (x^3\Delta x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3\Delta x}{2} + \frac{x^2\Delta x^2}{4}$$

so wird, wenn $\Delta x = 1$

$$\Sigma 1 = x$$

$$\Sigma x = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}$$

$$\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$$

$$\Sigma x^3 = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4}$$

§. 9.

Wenn man die Veränderung einer Funkzion suchet, so verschwindet allemal das Glied, welches bloß beständige Größen enthält. Es sei

$$ax = b + cy$$

so ist die Veränderungs-Gleichung

$$a\Delta x = c\Delta y$$

hier ist die beständige Größe verschwunden; und nimmt man die Summen, so kommt nur

$$ax = cy$$

wo

wo das b gänzlich mangelt. Deswegen muß man, wenn man wie gewöhnlich die Summe einer Funkzion gefunden hat, noch eine willkürliche beständige Größe (constante arbitraire) zusetzen. Zum Beispiel, man hat gefunden, daß wenn $\Delta x = 1$, so ist

$$\Sigma x = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}$$

Diese Summe ist aber noch nicht vollständig, sondern man muß sagen

$$\Sigma x = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + C$$

indem man unter C alle mögliche beständige Größen verstehet. Man kann z. B. annehmen $C = 0$, $C = 1$, $C = 2$, $C = \sqrt{3}$, u. s. f. Jeder Werth, den man der Größe C giebt, wird der gefundenen Summe auch einen besonderen Werth geben. So viel man also verschiedene Werthe von C annimmt, so viel bekommt man besondere Summen, die alle in der allgemeinen Summe, welche das C bei sich führet, begriffen sind.

Uebrigens, weil in einer Funkzion oder Gleichung, alle bloß bekannte Glieder als ein einziges betrachtet werden können, so braucht man bei der Summe auch nur eine einzige willkürliche Größe anzusetzen, welche jede einfache oder zusammengesezte beständige Größe vorstellen kann.

§. 10.

Aufgabe.

Den Werth der willkürlichen Größe für jeden besonderen Fall finden.

Auflösung. Wenn man die Gleichung zwischen zwei veränderlichen Größen gefunden hat, so bestimme man

man, aus der Natur der Aufgabe, oder aus freiem Willen, welchen bestimmten Werth die eine veränderliche Größe bekommen soll, wenn die andere auch einen gewissen Werth bekommt. Diese bestimmten Werthe setze man in die Gleichung, so kann man den gehörigen Werth von C daraus ziehen.

Beispiel. Es sei

$$\Delta y = a\Delta x$$

so wird $y = ax + C$

Gesetzet man will daß $y = a^2$ werden soll, wenn $x = 1$ wird, so bekommt man

$$a^2 = a + C$$

$$a^2 - a = C$$

In diesem Falle muß folglich die besondere Summe also geschrieben werden.

$$y = ax + a^2 - a$$

und in der That, wird hier $x = 1$, so ist

$$y = a + a^2 - a = a^2$$

Gesetzet, man will, daß $y = \frac{1}{2}a$ werden soll, wenn $x = 0$ wird, so hat man

$$\frac{1}{2}a = 0 + C$$

oder $\frac{1}{2}a = C$

und die besondere Summe ist für diesen Fall

$$y = ax + \frac{1}{2}a$$

wenn hier $x = 0$ wird, so wird y verlangter Maßen $= \frac{1}{2}a$.

Zusatz I. Ist die Gleichung zwischen mehr als zwei veränderlichen Größen, so muß man bestimmen, was eine derselben werden soll, wenn alle anderen einen bestimm-

bestimmten Werth bekommen. Z. B. Gesetzet, man hätte gefunden

$$x^2y = 3z^3 + C$$

und es soll z werden $= 10$, wenn $x = 1$ und $y = 2$ wird, so bekommt man

$$2 = 3 \cdot 10^3 + C$$
$$\text{oder } 2 = 3000 + C$$
$$\text{folglich } 2 - 3000 = -2998 = C$$

und die Gleichung wird

$$x^2y = 3z^3 - 2998$$

Zusatz II. Wenn man die allgemeine Summe einer Funkzion gesuchet hat, so kann man die Funkzion einer veränderlichen Größe z gleich setzen, und dann bestimmen, was z oder die ganze Funkzion werden soll, wenn die veränderlichen Größen einen gewissen Werth bekommen. Es sei gefunden worden

$$ax^2 + bx + C$$

so setze man

$$z = ax^2 + bx + C$$

Soll nun zum Beispiel die ganze Funkzion $= 0$ werden, wenn $x = 1$, so ist

$$0 = a + b + C$$
$$-a - b = C$$
$$\text{folglich } z = ax^2 + bx - a - b$$

Zusatz III. Der gewöhnlichste Fall ist dieser, daß die Funkzion einer einzigen veränderlichen Größe null werden soll, wenn die Größe selbst null wird. In diesem Falle muß auch $C = 0$ sein; oder es ist keine willkürliche Größe zuzusetzen. Denn es sei

$$z = ax + bx^2 + cx^3 + C$$

wird

wird nun $x = 0$ und $z = 0$, so ist

$$0 = 0 + C$$

oder $0 = C$

folglich bleibet die gefundene Funkzion ohne willkürliche Größe.

§. 11.

Wir haben schon oft in diesem Werke Gelegenheit gehabt von Reihen (séries) zu sprechen. Man verstehet darunter meistentheils solche auf einander folgende Glieder, wo allemal das folgende auf die nämliche Art oder nach dem nämlichen Gesetze aus den vorhergehenden entstehet.

Man pfleget sich auch die Entstehung einer solchen Reihe so vorzustellen, als wären die Glieder lauter verschiedene Werthe, welche eine gewisse Funkzion von x annimmt, wenn x selbst immer um 1 zunimmt. Es sei angenommen diese Funkzion

$$z = 2x^3 + 5x^2 + 7x$$

Wenn wir setzen

$x = 0$,	so wird	$z = 0$
$x = 1$	"	$z = 14$
$x = 2$	"	$z = 50$
$x = 3$	"	$z = 120$
$x = 4$	"	$z = 236$
&c.		&c.

Also bekommt man diese Reihe

0, 14, 50, 120, 236, u. s. f.

Die Funkzion, woraus die Reihe entstanden, heißt das allgemeine Glied (terme général) der Reihe. Also ist

$$2x^3 + 5x^2 + 7x$$

das allgemeine Glied der Reihe

0, 14, 50, 120, 236, u. s. f.

Manch-

Manchmal stellet man sich auch die Entstehung einer Reihe anders vor. Man nehme nach Belieben eine Größe zum Anfang der Reihe. Man nehme noch an, daß die Glieder vor dem ersten alle null sind. Man bestimme einige beständige Multiplikatoren. Um nun jedes Glied der Reihe zu bekommen, multiplizire man die vorhergehenden mit den angenommenen Multiplikatoren, nämlich das letzte Glied mit dem letzten Multiplikator, das vorletzte mit dem vorletzten, u. s. f. Man addire die Produkte, und nehme das Aggregat zum gesuchten Gliede an.

Z. B. Es soll 1 das erste Glied sein, und die Multiplikatoren sollen sein 2, 3 und 4.

0, 0, 1
mult. 2, 3, 4
0 + 0 + 4 = 4, zweites Glied.

0, 1, 4
mult. 2, 3, 4
0 + 3 + 16 = 19, drittes Glied.

1, 4, 19
mult. 2, 3, 4
2 + 12 + 76 = 90, viertes Glied.

4, 19, 90
mult. 2, 3, 4
8 + 57 + 360 = 425, fünftes Glied.

Die Reihe wird also sein:
1, 4, 19, 90, 425, u. s. f.

Die Folge der beständigen Multiplikatoren, als hier 2, 3, 4 heißt der Maßstab des Verhältnisses (échelle de relation). Die Reihe selbst, welche auf solche Art entstan-

stunden ist, heißt eine rückläufige Reihe (série récurrente.) Weil aber die Untersuchung dieser Art Reihen viele Schwierigkeiten verursachet, so wollen wir hier die Reihen aus dem vorigen Gesichtspunkte betrachten, nämlich als Entwickelungen eines allgemeinen Gliedes, wobei uns die Lehre von den Summen der Veränderungs-Funkzionen sehr zu statten kommen wird.

§. 12.

Das allgemeine Glied für eine Reihe bestimmter Zahlen finden.

Vorbereitung. Es sei z eine Funkzion von x. Gesetzet, wenn man nach und nach den Werth von x vergrößert, so werde z allmälig

$$z,\ z^{I},\ z^{II},\ z^{III},\ z^{IV},\ z^{V},\ \text{u. s. f.}$$

Es ist klar, daß jedes folgende Glied in dieser Reihe entstehen muß, wenn das vorhergehende um seine Veränderung vergrößert wird. Weil also das erste Glied z ist, so muß das zweite sein $z+\Delta z$. Das dritte muß sein $z+\Delta z$ und noch die Veränderung von $z+\Delta z$, nämlich

$$z+\Delta z+\Delta(z+\Delta z)=z+2\Delta z+\Delta^2 z.$$

Das dritte Glied wird sein

$$(z+2\Delta z+\Delta^2 z)+\Delta(z+2\Delta z+\Delta^2 z)=z+3\Delta z+3\Delta^2 z+\Delta^3 z.$$

Wenn man so fortfähret, so findet man

$$\begin{aligned}
z^{I} &= z+\Delta z\\
z^{II} &= z+2\Delta z+\Delta^2 z\\
z^{III} &= z+3\Delta z+3\Delta^2 z+\Delta^3 z\\
z^{IV} &= z+4\Delta z+6\Delta^2 z+4\Delta^3 z+\Delta^4 z\\
z^{V} &= z+5\Delta z+10\Delta^2 z+10\Delta^3 z+5\Delta^4 z+\Delta^5 z\\
&\quad \&c.\ \ \&c.
\end{aligned}$$

Beobach-

Beobachtet man das Gesetz, nach welchem die Glieder auf einander folgen, so siehet man, daß

$$z^N = z + N\Delta z + \frac{N(N-1)}{1.\ 2}\Delta^2 z + \frac{N(N-1)(N-2)}{1.\ 2.\ 3}\Delta^3 z + \&c.$$

Diese Formel hat mit der Formel für zweitheilige Potenzen die größte Aehnlichkeit, wie schon im vorigen Hauptstücke §. 13 angemerket worden. Sie drucket das Nte Glied der Reihe aus, wenn das erste nicht mitgerechnet wird, oder das $(N+1)$te, wenn das erste mitgezählet wird. Man beobachte nur, daß hier N kein Exponent einer Potenz ist, sondern ein algorithmisches Zeichen, welches die Ordnung des Gliedes angezeiget. Siehe IV. Hauptstück §. 32.

Es sei nun gegeben eine Reihe Zahlen

z, z^I, z^{II}, z^{III}, &c.
oder A, B, C, D, &c.

wozu das allgemeine Glied gefunden werden soll. Wir nehmen an, daß die Reihe aus einer Funkzion von x entstanden ist, worinn man nach und nach dem x die Werthe 0, 1, 2, 3, u. s. f. gegeben hat. Wenn dieses ist, so gilt x im ersten Gliede 0, im zweiten 1, im dritten 2, im vierten 3, u. s. f. überhaupt x gilt N im Nten Gliede, wenn das erste nicht mitgezählet wird. Folglich kann man in der gefundenen Formel setzen x anstatt N, und es wird

$$z^N \text{ oder } Z = z + x\Delta z + \frac{x(x-1)}{1.\ 2}\Delta^2 z + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.\ 2.\ 3}\Delta^3 z + \&c.$$

Hier ist z^N oder Z das so vielte Glied $+1$ als x Einheiten vorstellet. Es bleibet nun übrig zu untersuchen, wie Δz, $\Delta^2 z$, $\Delta^3 z$, u. s. f. gefunden werden. Man suche wie aus den auf einander folgenden Größen z, z^I, z^{II}, z^{III}, u. s. f. die erste, zweite, dritte Veränderung entstehet.

Funk.	Erste Verän.	Zweite Veränder.	Dritte Veränderung.
ζ	$\Delta\zeta = \zeta^{I} - \zeta$		
ζ^{I}	$\Delta\zeta^{I} = \zeta^{II} - \zeta^{I}$	$\Delta^{2}\zeta = \zeta^{II} - 2\zeta^{I} + \zeta$	
ζ^{II}	$\Delta\zeta^{II} = \zeta^{III} - \zeta^{II}$	$\Delta^{2}\zeta^{I} = \zeta^{III} - 2\zeta^{II} + \zeta^{I}$	$\Delta^{3}\zeta = \zeta^{III} - 3\zeta^{II} + 3\zeta^{I} - \zeta$
ζ^{III}	$\Delta\zeta^{III} = \zeta^{IV} - \zeta^{III}$	$\Delta^{2}\zeta^{II} = \zeta^{IV} - 2\zeta^{III} + \zeta^{II}$	$\Delta^{3}\zeta^{I} = \zeta^{IV} - 3\zeta^{III} + 3\zeta^{II} - \zeta^{I}$
ζ^{IV}			

und so weiter. Die Veränderungen sind hier gehöriger Maßen gefunden worden, indem man jede Funkzion von der folgenden in der nämlichen Ordnung abgezogen hat. Aus dieser Tafel bekommt man also

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta \\ \Delta\zeta &= \zeta^{I} - \zeta \\ \Delta^{2}\zeta &= \zeta^{II} - 2\zeta^{I} + \zeta \\ \Delta^{3}\zeta &= \zeta^{III} - 3\zeta^{II} + 3\zeta^{I} - \zeta \\ &\quad \&c. \quad \&c. \end{aligned}$$

oder wenn man die gegebene Reihe ζ, ζ^{II}, ζ^{III}, ζ^{IV}, u. s. f. wie oben geschehen durch A, B, C, D, u. s. f. ausdrukket, so ist

$$\begin{aligned} \zeta &= A \\ \Delta\zeta &= B - A \\ \Delta^{2}\zeta &= C - 2B + A \\ \Delta^{3}\zeta &= D - 3C + 3B - A \\ &\quad \&c. \quad \&c. \end{aligned}$$

Setzet man nun diese Werthe in die obige Formel $Z = \zeta + x\Delta\zeta + \&c.$ so bekommt man folgende Regel.

Auflösung. Die gegebene Reihe sei A, B, C, D, E, *&c.* so wird das allgemeine Glied Z aus dieser Formel gefunden

$$Z = A$$

$$Z = A$$
$$+ x(B - A)$$
$$+ \frac{x(x-1)}{1.\ 2}(C - 2B + A)$$
$$+ \frac{x(x-1)(x-2)}{1.\ 2.\ 3}(D - 3C + 3B - A)$$
$$+ \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.\ 1.\ 3.\ 4}(E - 4D + 6C - 4B + A)$$
$$\&c.\quad \&c.$$

Die Faktoren vor A, B, C, D, u. s. f. in dieser Formel, folgen nach der Regel für die Erhebung einer zweitheiligen Größe. Wenn nun zuletzt eine dieser Veränderungen $(B - A)$, $(C - 2B + A)$ u. s. f. null wird, so bricht die Formel ab, und man hat das allgemeine Glied der gegebenen Reihe gefunden.

Beispiel I. Es sei zu finden das allgemeine Glied für die Reihe

1, 4, 9, 16, 25, u. s. f.

welche die natürliche Folge der Quadratzahlen enthält. Hier ist also

$$A = 1$$
$$B = 4$$
$$C = 9$$
$$D = 16$$
$$E = 25$$
$$\&c.\quad \&c.$$

Es wird folglich

$$B - A = 3$$
$$C - 2B + A = 2$$
$$D - 3C + 3B - A = 0$$

und alle folgende Veränderungen werden auch $= 0$.

Setzet man nun die gefundenen Werthe in die Formel, so wird

$$\begin{aligned} Z &= 1 + 3x + 2\frac{x(x-1)}{1.\ 2} \\ &= 1 + 3x + x^2 - x \\ &= 1 + 2x + x^2 \\ &= (1+x)^2 \end{aligned}$$

Es ist also $(1+x)^2$ das allgemeine Glied für die Reihe der Quadratzahlen. Und in der That, wenn man anstatt x nach und nach 0, 1, 2, 3, 4, u. s. f. setzet, so bekommt man 1, 4, 9, 16, 25, u. s. f.

Beispiel II. Es wird das allgemeine Glied verlanget für die Reihe

1, 8, 27, 64, 125, *&c.*

welche die natürliche Folge der Kubikzahlen enthält. Hier ist

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B &= 8 \\ C &= 27 \\ D &= 64 \\ E &= 125 \\ &\&c.\ \&c. \end{aligned}$$

Hieraus wird

$$\begin{aligned} B - A &= 7 \\ C - 2B + A &= 12 \\ D - 3C + 3B - A &= 6 \\ E - 4D + 6C - 4B + A &= 0 \end{aligned}$$

und alle folgende Veränderungen sind $= 0$. Also bekommt man

$$\begin{aligned} Z &= 1 + 7x + 12\frac{x(x-1)}{1.\ 2} + 6\frac{x(x-1)(x-2)}{1.\ 2.\ 3} \\ &= 1 + 3x + 3x^2 + x^3 \\ &= (1+x)^3 \end{aligned}$$

Also

Also ist $(1+x)^3$ das allgemeine Glied für die Reihe der Kubikzahlen.

§. 13.

Das Aggregat so vieler Glieder als man will, in einer gegebenen Reihe finden.

Vorbereitung. Wir haben im vorigen Paragraph gesehen, daß, wenn die Glieder nach und nach werden z, z', z'', z''', z'''' &c., dieselben folgendermaßen aus ihren Veränderungen entstehen

$$\begin{aligned} z &= z \\ z' &= z + \Delta z \\ z'' &= z + 2\Delta z + \Delta^2 z \\ z''' &= z + 3\Delta z + 3\Delta^2 z + \Delta^3 z \\ z'^{v} &= z + 4\Delta z + 6\Delta^2 z + 4\Delta^3 z + \Delta^4 z \\ &\quad \&c. \quad \&c. \end{aligned}$$

Wenn man nun nach und nach die beiden ersten, die drei ersten, die vier ersten Glieder, u. s. f. addiret, so bekommt man

$$\begin{aligned} z \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= z \\ z + z' \ldots\ldots\ldots\ldots &= 2z + \Delta z \\ z + z' + z'' \ldots\ldots\ldots &= 3z + 3\Delta z + \Delta^2 z \\ z + z' + z'' + z''' \ldots\ldots &= 4z + 6\Delta z + 4\Delta^2 z + \Delta^3 z \\ z + z' + z'' + z''' + z'''' &= 5z + 10\Delta z + 10\Delta^2 z + 5\Delta^3 z + \Delta^4 z \end{aligned}$$

Hieraus siehet man überhaupt, daß das Aggregat so vieler Glieder, als man will; vom ersten gezählet, durch folgende Formel gefunden werden kann:

$$z + z' + z'' + z''' + \&c. \ldots + z^{n-1} = nz + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}\Delta z + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}\Delta^2 z + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\Delta^3 z + \&c.$$

Es ist aber, wenn man A, B, C, D, E, u. s. f. anstatt z, z', z'', z''', z'''' &c. schreibet

$$\Delta z = B - A$$
$$\Delta^2 z = C - 2B + A$$
$$\Delta^3 z = D - 3C + 3B - A$$
$$\Delta^4 z = E - 4D + 6C - 4B + A$$
$$\&c. \quad \&c.$$

wie vor kurzem bewiesen worden. Setzet man nun diese Werthe in der Formel, so entstehet folgende Regel.

Auflösung. Es werde gesuchet das Aggregat von N Gliedern einer Reihe A, B, C, D, E, u. s. f., vom ersten an gezählet, so wird dieses Aggregat durch folgende Reihe ausgedrucket:

$$N.A + \frac{N(N-1)}{1.2}(B-A) + \frac{N(N-1)(N-2)}{1.2.3}(C-2B+A) + \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{1.2.3.4}(D-3C+3B-A) + \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)}{1.2.3.4.5}(E-4D+6C-4B+A) \&c.$$

Der Buchstabe N drucket hier die Anzahl der Glieder aus. Denn die Formel ist, vermöge der Vorbereitung, das Aggregat von

$$z + z' + z'' + z''' + z'^{V} + \&c. \ldots + z^{N-1}$$

Es ist aber das letzte Glied z^{N-1} in der That das Nte Glied nicht das $(N-1)$te, weil das erste Glied z kein algorithmisches Zeichen bei sich hat.

Beispiel I. Es sei verlanget das Aggregat der N ersten Quadratzahlen, so ist hier

$$A = 1$$
$$B - A = 3$$
$$C - 2B + A = 2$$

und

und die folgenden Differenzen sind null. Setzet man diese Werthe in die Formel, so entstehet

$$N + 3\frac{N(N-1)}{1.\ 2} + 2\frac{N(N-1)(N-2)}{1.\ 2.\ 3}$$

oder $$\frac{N + 2N^2 + 2N^3}{6}$$

Es sei $N = 10$, so ist die Summe der 10 ersten Quadratzahlen

$$\frac{10 + 300 + 2000}{6} = 385$$

Beispiel II. Es sei verlanget das Aggregat der N ersten Kubikzahlen, so ist hier

$$A = 1$$
$$B - A = 7$$
$$C - 2B + A = 12$$
$$D - 3C + B - A = 6$$

und die folgenden Veränderungen sind null. Setzet man diese Werthe in die Formel, so bekommt man, wenn man das Aggregat durch S andeutet,

$$S = N + 7\frac{N(N-1)}{1.\ 2} + 12\frac{N(N-1)(N-2)}{1.\ 2.\ 3} + 6\frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$$

$$24S = 24N + 84N(N-1) + 48N(N-1)(N-2) + 6N(N-1)(N-2)(N-3)$$

oder, wenn man die Produkte entwickelt und addiret

$$24S = 6N^2 + 12N^3 + 6N^4$$
$$4S = N^2 + 2N^3 + N^4$$
$$S = N^2 + 2N^3 + N^4$$
$$S = \frac{N^2 + 2N^3 + N^4}{4}$$

Es sei $N = 10$, so wird das Aggregat der 10 ersten Kubikzahlen

$$\frac{100 + 2000 + 10000}{4} = 3025.$$

Beispiel III. Es werde verlanget, das Aggregat von n Glieder einer arithmetischen Fortschreitung, worin das erste Glied a und der Unterschied der Glieder allemal d ist, so findet keine zweite Veränderung Statt. Es ist also in diesem Falle

$$A = a$$
$$B - A = d$$

und die höheren Veränderungen sind null.

Setzet man diese Werthe in der Formel, und nennet man das Aggregat S, so wird

$$S = na + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} d$$
$$2S = 2na + nnd - nd$$
$$2S = (2a + nd - d)n$$
$$S = \frac{(2a + nd - d)n}{2}$$

Diese letzte Formel ist die nämliche, welche man im VIIIten Hauptstücke, im Zusatz des §. 30 findet, und welche dort auf eine andere Art herausgebracht worden.

Anmerkung. Dies hier vorgeschriebene Verfahren kann nur in dem Falle gebrauchet werden, wo man auf Veränderungen kommt, welche null werden.

§. 14.

In einer Reihe ist jedes Glied die Veränderung des Aggregates aller vorhergehenden Glieder

Dieses wird ein jeder zugeben, so bald er es nur verstehet. Es sei eine Reihe

$$z, z', z'', z''', z^{IV}, \text{ &c.}$$

so wird das Aggregat nach und nach

$$S = z$$
$$S' = z + z'$$
$$S'' = z + z' + z''$$
$$S''' = z + z' + z'' + z'''$$
$$S^{IV} = z + z' + z'' + z''' + z^{IV}$$
$$\text{&c. &c.}$$

Hier

Hier ist die Veränderung

$$\begin{aligned} S' - S &= z' \\ S'' - S' &= z'' \\ S''' - S'' &= z''' \\ S^{IV} - S''' &= z'''' \\ &\&c. \quad \&c. \end{aligned}$$

Es ist also zum Beispiele z''' die Veränderung oder Zunahme des Aggregates $z + z' + z''$, desgleichen ist z'''' die Veränderung des Aggregates $z + z' + z'' + z'''$, u. s. f.

§. 15.

Aufgabe.

Aus dem allgemeinen Gliede einer Reihe das Aggregat so vieler Glieder, als man will, vom ersten an gezählet, finden.

Auflösung. Das allgemeine Glied (§. 12) drucket das NTE oder $x$te Glied einer Reihe aus, wenn man das erste nicht mit zählet, oder das $(x+1)$te, wenn man das erste mitzählet. Dieses $(x+1)$te Glied ist, vermöge des vorigen Paragraphs, die Veränderung des Aggregats aller vorhergehenden Glieder, oder der x ersten Glieder in der Reihe. Wenn also Z das allgemeine Glied ist, und S ist das Aggregat der x ersten Glieder, so hat man

$$Z = \Delta S$$

folglich $\Sigma Z = S$

Also um S oder das verlangte Aggregat zu bekommen, muß man zu Z die Summe suchen, das ist die Funkzion, deren Veränderung $= Z$ ist, indem $\Delta x = 1$ angenommen wird, wie oben (§. 8) gelehret worden.

Beispiel I. Das allgemeine Glied für die Quadratzahlen ist

$$Z = (1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$$

Folglich ist

$$\Delta S = 1 + 2x + x^2$$

Suchet man die Summe für jedes Glied nach §. 8, so ist

$$\Sigma 1 = x$$
$$2\Sigma x = x^2 - x$$
$$\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$$

Folglich ist

$$S = x + x^2 - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$$
$$6S = 6x + 6x^2 - 6x + 2x^3 - 3x^2 + x$$
$$6S = 2x^3 + 3x^2 + x$$
$$S = \frac{2x^3 + 3x^2 + x}{6}$$

So ist also die letzte Formel der Ausdruck für das Aggregat der x ersten Quadratzahlen. Schreibet man N anstatt x, so kommt

$$S = \frac{2N^3 + 3N^2 + N}{6}$$

wie schon §. 13 gefunden worden.

Beispiel II. Das allgemeine Glied für die Reihe der Kubikzahlen ist

$$Z = (1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

Wenn man hierzu, wie vorher, die Summe suchet, so findet man

$$S = \frac{x^4 + 2x^3 + x^2}{4}$$

welche Formel wiederum mit der im §. 13 gefundenen übereinstimmet.

Anmer-

Anmerkung. Es müste eigentlich hier bei den gefundenen Summen eine willkürliche Größe C zugesetzet werden. (§. 9). Z. B. für die Quadratzahlen wäre

$$x(1+1x+x^2) = \frac{2x^3+3x^2+x}{6} + C$$

$$\text{oder} \quad S = \frac{2x^3+3x^2+x}{6} + C$$

Man weiß aber, daß $S = o$ werden muß, wenn $x = o$, das ist, das Aggregat der Reihe wird null, wenn die Anzahl der Glieder null ist. Setzet man also o anstatt S und o anstatt x, so wird (§. 10)

$$o = o + C$$

$$\text{und} \quad o = C$$

Es ist also keine beständige Größe anzusetzen, und das gefundene Aggregat hat schon für sich selbst seine Richtigkeit.

§. 16.

Da wir uns jezt mit den Reihen beschäftigen, so wollen wir hier noch einige sehr bekannte Zahlreihen betrachten, und die vorigen Regeln darauf anwenden. Laßt uns erstlich die Polygonalzahlen vornehmen.

Eine **Polygonalzahl** oder **vieleckige Zahl** entstehet, wenn das Aggregat einiger Glieder einer arithmetischen Fortschreitung genommen wird, nämlich vom ersten Gliede an gezählet.

Man nehme einige arithmetische Fortschreitungen, wo in der ersten der Unterschied 1 sei, in der zweiten 2, in der dritten 3, u. s. f. Bei jeder Fortschreitung nehme man die Aggregate der beiden ersten, der drei ersten, der vier ersten Glieder, u. s. f., so entstehen die vieleckigen Zahlen folgender Maßen:

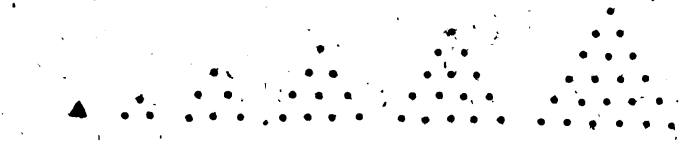
Fort-

Fortschreitungen.							Vieleckige Zahlen.						
1,	2,	3,	4,	5,	6,	&c.	1,	3,	6,	10,	15,	21	&c. dreieckige Zahlen.
1,	3,	5,	7,	9,	11,	&c.	1,	4,	9,	16,	25,	36	&c. viereckige Zahlen.
1,	4,	7,	10,	13,	16,	&c.	1,	5,	12,	22,	35,	51,	&c. fünfeckige Zahlen.
1,	5,	9,	13,	17,	21,	&c.	1,	6,	15,	28,	45,	66,	&c. sechseckige Zahlen.
1,	6,	11,	16,	21,	26,	&c.	1,	7,	18,	34,	55,	81,	&c. siebeneckige Zahlen.
			&c.							&c.			

Den Namen vieleckige Zahlen, haben diese Zahlen daher bekommen, weil ihre Einheiten, wenn sie mit Punkten ausgedrucket werden, sich in Gestalt eines regelmäßigen Vielecks anordnen lassen. Die Zahl, welche die Stelle eines Vielecks in der natürlichen Ordnung aller gleichvieleckigen Zahlen anzeiget, heißt die Basis oder Seite des Vielecks. Z. B. 3 ist die Seite des Dreiecks 6, des Vierecks 9, des Fünfecks 12, des Sechsecks 15, des Siebenecks 18, u. s. f., weil jede dieser Zahlen die dritte in ihrer Art ist.

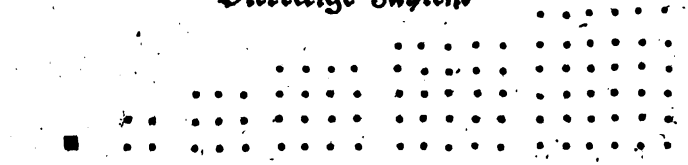
Folgende Figuren werden die Entstehung der vieleckigen Zahlen deutlicher vor Augen legen:

Dreieckige Zahlen.



Seite	1	2	3	4	5	6
Dreieck	1	3	6	10	15	21

Viereckige Zahlen.

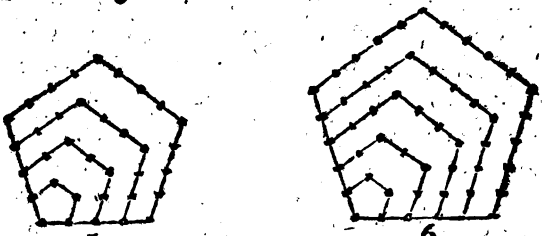


Seite	1	2	3	4	5	6
Viereck	1	4	9	16	25	36

Fünf-

Fünfeckige Zahlen.

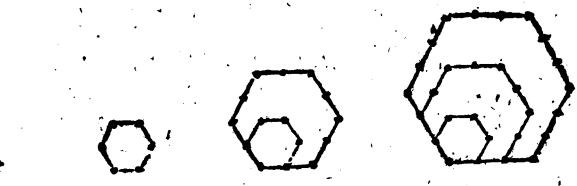
Seite	1	2	3	4
Fünfeck	1	5	12	22



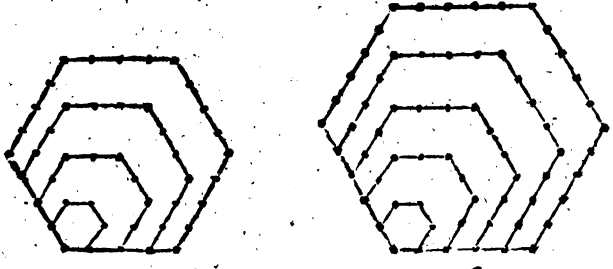
5
35

6
51

Sechseckige Zahlen.



Seite	1	2	3	4
Sechseck	1	6	15	28



5
45

6
66

§. 17.

§. 17.
Aufgabe.

Die *n*te *meckige* Zahl finden, zum Beispiel die dritte viereckige, die 10te dreieckige u. s. f.

Vorbereitung. Jede Reihe von gleichvieleckigen Zahlen entstehet aus einer arithmetischen Fortschreitung, worinn der Unterschied um 2 kleiner ist, als die Anzahl der Ecken. Z. B. Die Fortschreitung woraus die Dreiecke entstehen, hat 1 zum Unterschiede, das ist 3—2; die Fortschreitung woraus die Vierecke entstehen, hat 2 das ist 4—2 zum Unterschiede. Für die Fünfecke ist der Unterschied in der Fortschreitung 5—2=3, u. s. f. Also entstehen überhaupt *meckige* Zahlen aus einer Fortschreitung, wo der Unterschied $m-2$ ist. Eine solche Fortschreitung kann nun folgender Maßen vorgestellet werden, wenn das erste Glied 1 ist.

$1, 1+(m-2), 1+2(m-2), 1+3(m-2), 1+4(m-2)$, &c.

Das erste Glied 1 machet die erste *meckige* Zahl aus, das Aggregat der beiden ersten machet die zweite *meckige* Zahl, das Aggregat der drei ersten Glieder giebt die dritte *meckige* Zahl, u. s. f. Ueberhaupt das Aggregat der n ersten Glieder ist die *n*te *meckige* Zahl. Man setze also die Fortschreitung bis auf n Glieder fort.

$1, 1+(m-2), 1+2(m-2), 1+3(m-2)$, &c... $1+(n-1)(m-2)$

Das *n*te Glied wird $1+(n-1)(m-2)$. Nun suche man das Aggregat dieser n Glieder (VIII. Hauptst. §. 30). Um dieses zu erhalten, muß man das Aggregat des letzten und ersten Gliedes nehmen, nämlich

$$2+(n-1)(m-2)$$

Dieses wird mit der Anzahl n der Glieder multipliziret, so kommt $2n+n(n-1)(m-2)$

Dieses Produkt wird zuletzt durch 2 getheilet, so entstehet

$$\frac{2n+n(n-1)(m-2)}{2}$$

oder $n+\frac{1}{2}n(n-1)(m-2)$

oder,

oder, wenn man die Produkte entwickelt

$$\frac{mnn - 2nn - mn + 4n}{2}$$

oder $\frac{(m-2)nn-(m-4)n}{2}$

Alle diese Ausdrücke geben die Summe der n ersten Glieder in einer Fortschreitung, wo das erste Glied 1 und und der Unterschied $m-2$ ist, folglich zugleich die $n$te Zahl von m Ecken, oder die $m$eckige Zahl, deren Seite n ist.

Auflösung. Wenn die $n$te $m$eckige Zahl verlanget wird, so bediene man sich einer der eben gefundenen Formeln, worunter die zweite am bequemsten ist, nämlich

$$n + \tfrac{1}{2}n(n-1)(m-2)$$

und wo m die Anzahl der Ecken und n die Seite oder Basis bedeutet.

Beispiel I. Es werde verlanget die 10te dreieckige Zahl. Hier ist $n=10$, $m=3$. Folglich wird die Formel

$$10 + \tfrac{1}{2}.10(10-1)(3-2)$$

oder $10+5.9.1$
oder $10+45$
oder 55

Beispiel II. Es werde verlanget die 7te 9eckige Zahl, hier ist $n=7$, $m=9$, und die Formel giebt.

$$7 + \tfrac{5}{2}.7(7-1)(9-2)$$

oder $7+\frac{1}{2}.7.6.7$
oder $7+3.7^2$
oder $7+3.49$
oder $7+147$
oder 154

Zusatz.

Zusatz. Es sei die *n*te *m*eckige Zahl k genannt, so ist

$$k = \frac{(m-2)nn-(m-4)n}{2}$$

Hieraus läßt sich m oder n bestimmen, wenn es verlanget wird. Es werde gefraget, welches die Seite der 9eckigen Zahl 154 ist, so ist $k = 154$, $m = 9$, also

$$154 = \frac{(9-2)nn-(9-4)n}{2}$$

$$154 = \frac{7nn-5n}{2}$$

$$2 \cdot 154 = 7nn - 5n$$

$$\frac{2 \cdot 154}{7} = nn - \frac{5}{7}n$$

$$44 = nn - \tfrac{5}{7}n$$

$$44 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^2 = nn - \frac{5}{7}n + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^2$$

$$\frac{8649}{196} = nn - \frac{5}{7}n + \frac{25}{196}$$

$$\sqrt{\frac{8649}{196}} = \sqrt{\left(nn - \frac{5}{7}n + \frac{5^2}{14^2}\right)}$$

$$\pm \frac{93}{14} = n - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7}$$

$$\frac{5}{14} \pm \frac{93}{14} = n$$

Es ist also $n = \frac{98}{14} = 7$, oder 154 ist die siebente 9eckige Zahl. Die verneinte Wurzel $\frac{5-93}{14} = -\frac{88}{14} = -6\frac{2}{7}$ kann hier keine Bedeutung haben, weil man keine verneinte Seiten für die vieleckigen Zahlen anzunehmen pfleget.

§. 18.

§. 18.

Der Ausdruck

$$n + \tfrac{1}{2}n(n-1)(m-2)$$

oder $$x + \tfrac{1}{2}x(x-1)(m-2)$$

bedeutet die *n*te oder *x*te *m*eckige Zahl. Dieser Ausdruck ist also ein allgemeines Glied für die Folge der *m*eckigen Zahlen. Weil aber das allgemeine Glied, wie oben gezeiget worden, nicht eigentlich das *x*te, sondern das $(x+1)$te Glied ausdrucken soll, so setze man in die letzte Formel $x+1$ anstatt x. Daher entstehet, wenn Z die $(x+1)$te *m*eckige Zahl ist

$$Z = 1 + x + \tfrac{1}{2}x(x+1)(m-2)$$

oder $$Z = \frac{m-2}{2}xx + \frac{m}{2}x + 1$$

§. 19.

Aufgabe.

Das Aggregat einer Reihe von gleichvieleckigen Zahlen finden.

Vorbereitung. Man suche die Summe zum allgemeinen Gliede.

$$\frac{m}{2}xx - xx + \frac{m}{2}x + 1$$

indem $\Delta x = 1$ gesetzet wird (§. 15). In dieser Voraussetzung wird

$$\frac{m}{2}\Sigma xxx = \frac{m}{2}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{m}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{m}{2}\cdot\frac{x}{6} = \frac{m}{6}x^3 - \frac{m}{4}x^2 + \frac{m}{12}x$$

$$-\Sigma xx = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{6} = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x$$

$$\frac{m}{2}\Sigma x = \frac{m}{2}\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{m}{2}\cdot\frac{x}{2} \ldots = \ldots + \frac{m}{4}x^2 - \frac{m}{4}x$$

$$\Sigma 1 = \ldots\ldots\ldots\ldots + x$$

Addiret man dieſe Summen, und nennet das verlangte Aggregat S, ſo iſt

$$S=\left(\frac{m}{6}-\frac{1}{3}\right)x^3+\tfrac{1}{2}x^2-\left(\frac{m}{4}-\frac{m}{12}-1+\frac{1}{6}\right)x$$

$$12S=(2m-4)x^3+6x^2-(2m-10)x$$

$$6S=(m-2)x^3+3x^2-(m-5)x$$

$$S=\frac{(m-2)x^3+3x^2-(m-5)x}{6}$$

Auflöſung. Man bediene ſich der letzteren Formel, nämlich

$$S=\frac{(m-2)x^3+3x^2-(m-5)x}{6}$$

wo x die Anzahl der Glieder, m die Anzahl der Ecken, und S das Aggregat vorſtellet.

Beiſpiel I. Es werde verlanget das Aggregat der 6 erſten 7 eckigen Zahlen, ſo iſt $x=6$, $m=7$, folglich

$$S=\frac{(7-2)6^3+3.6^2-(7-5)6}{6}$$

$$=\frac{5.6^3+3.6^2-2.6}{6}$$

$$=5.6^2+3.6-2$$

$$=196.$$

Beiſpiel II. Es werde verlanget das Aggregat der 5 erſten dreieckigen Zahlen, ſo iſt $x=5$, $m=3$, folglich

$$S=\frac{(3-2)5^3+3.5^2-(3-5).5}{6}$$

$$=\frac{5^3+3.5^2+2.5}{6}$$

$$=35$$

§. 20.

Die figürlichen Zahlen, welche einige Schriftsteller mit den vieleckigen Zahlen verwechseln, entstehen folgender Maßen

1, 1, 1, 1, 1, 1, &c. beständige Zahlen, oder von der 1sten Ordnung.

1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. natürliche Zahlen, oder von der 2ten Ordnung.

1, 3, 6, 10, 15, 21, &c. dreieckige Zahlen, oder von der 3ten Ordnung.

1, 4, 10, 20, 35, 56, &c. pyramidale Zahlen, oder von der 4ten Ordnung, &c. &c.

Hier entstehet jede Zahl aus dem Aggregate der über ihr stehenden, und aller vorhergehenden in der vorigen Reihe. Z. B. Die natürliche Zahl 6 entstehet aus den beständigen Zahlen 1+1+1+1+1+1. Die dreieckige Zahl 21 entstehet aus den natürlichen Zahlen 1+2+3+4+5+6. Sie pyramidale Zahl 56 entstehet aus den dreieckigen Zahlen 1+3+6+10+15+21.

Die dreieckigen Zahlen, welche hier vorkommen, sind zugleich vieleckige Zahlen, und ihre Entstehung aus Punkten ist schon oben erkläret worden. Die Pyramidal-Zahlen haben ihren Namen von der Pyramide, einem geometrischen Körper. Man nehme die auf einander folgenden Dreiecke, so wie sie §. 16 vorgestellet sind, und lege sie über einander, nämlich das größte Dreieck unten und die kleineren darüber, immer in einer gewissen Entfernung, so entstehet eine dreieckige Pyramide, das ist, ein Körper der eine dreieckige Grundfläche, und noch drei dreieckige Flächen hat, welche oben spitz zusammen laufen. Auf solche Art kann man einen Haufen Kanonenkugeln in Gestalt einer Pyramide über einander legen. Es sei die unterste Lage ein Dreieck von 21 Kugeln, die zweite ein Dreieck von 15, die dritte von 10, die vierte von 6, die

fünfte von 3, die sechste von 1, so entstehet eine Pyramide von $1+3+6+10+15+21=56$ Kugeln.

Die figürlichen Zahlen über die vierte Ordnung können nicht durch Punkte oder Kugeln vorgestellet werden, und behalten nur den Namen figürlicher Zahlen, wegen ihrer ähnlichen Entstehung aus den Aggregaten der vorhergehenden Reihen.

§. 21.

Laßt uns nun die allgemeinen Glieder für die Reihen der figürlichen Zahlen suchen.

I) Für die beständigen Zahlen oder die gleichen Einheiten ist das $(x+1)$te Glied allemal 1. Also ist

$$Z=1$$

wenn nämlich Z das $(x+1)$te Glied bedeutet.

II) Für die natürlichen Zahlen ist das $(x+1)$te Glied $x+1$, also

$$Z=x+1$$

III) Nimmt man die Summe dieses allgemeinen Gliedes, so

$$\Sigma x=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}$$

$$\Sigma 1=x$$

folglich

$$\Sigma(x+1)=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+x=\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}$$

Also ist $\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}$ oder $\frac{x(x+1)}{1.\ 3}$ das Aggregat der x ersten natürlichen Zahlen. Folglich ist auch

$$\frac{x(x+1)}{1.\ 2}$$

die

die $x$te viereckige Zahl. Diese Formel kommt auch mit derjenigen überein, welche aus §. 18 fließt. Denn dort ist die $x$te $m$eckige Zahl

$$x+\tfrac{1}{2}x(x-1)(m-2)$$

Beim Dreieck aber ist $m=3$, folglich $m-2=1$, daher entstehet

$$x+\tfrac{1}{2}x(x-1)$$
$$=x+\tfrac{1}{2}xx-\tfrac{1}{2}x=\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{2}x=\frac{x(x+1)}{1.\ 2}$$

Setzet man in die gefundene Formel $x+1$ anstatt x, so entstehet

anstatt $\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}$

diese Formel $\frac{(x+1)^2}{2}+\frac{(x+1)}{2}$

oder $\frac{x^2}{2}+\frac{3x}{2}+1$

und diese Formel drucket die $(x+1)$te dreieckige Zahl aus.

IV) Man suche die Summe der lezten Formel, so findet man

$$\tfrac{1}{2}\Sigma x^2=\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{12}$$
$$\tfrac{3}{2}\Sigma x=\frac{3x^2}{4}-\frac{3x}{4}$$
$$\Sigma 1=x$$

Ist also S das Aggregat der x ersten dreieckigen Zahlen, so wird

$$S=\frac{x^3}{6}+\frac{3x^2}{4}-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{12}-\frac{3x}{4}+x$$
$$12S=2x^3+9x^2-3x^2+x-9x+12x$$
$$12S=2x^3+6x^2+4x$$
$$S=\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}=\frac{x(x+1)(x+2)}{1.\ 2.\ 3.}$$

und dieſe Formel drukket zugleich das Aggregat der x erſten dreieckigen Zahlen, und die $x$te pyramidale Zahl aus.

V) Wenn man nun in die letzte Formel $x+1$ anſtatt x ſetzet, wiederum die Summe ſuchet, und ſo weiter fortfähret, findet man

die $x$te beſtändige Zahl $= 1$

die $x$te natürliche Zahl $= x$

die $x$te dreieckige Zahl $= \frac{x(x+1)}{1.\ 2}$

die $x$te pyramidale Zahl $= \frac{x(x+1)(x+2)}{1.\ 2.\ 3}$

die $x$te Zahl der 5ten Ordnung $= \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$

die $x$te Zahl der 6ten Ordnung $= \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$

und ſo ferner.

Alſo wird überhaupt ſein die $x$te Zahl der $n$ten Ordnung

$$\frac{x(x+1)(x+2)\ldots\ldots x(n-2)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ n-1}$$

Anmerkung. Dieſer Ausdruck iſt zugleich die Formel für die Anzahl der mittleren Verwechslungen von der $(n-1)$ten Ordnung, für x verſchiedene Größen. (V. Hauptſtück §. 23).

Wenn man die Potenzen einer zweitheiligen Größe folgender Maßen unter einander ſchreibet

$$\begin{array}{l}
1a + 1b \\
1a^2 + 2ab + 1b^2 \\
1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3 \\
1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4 \\
1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5
\end{array}$$

ſo

so sind die Koeffizienten in der ersten Reihe von oben herab die beständigen Zahlen; in der zweiten, die natürlichen; in der dritten, die dreieckige Zahlen; in der vierten die pyramidale Zahlen, u. s. f.

§. 22.

Aufgabe.

Das Aggregat einiger der ersten Glieder in einer Reihe figürlicher Zahlen von gleicher Ordnung finden.

Auflösung. Gesetzet, man soll das Aggregat der x ersten figürlichen Zahlen von der $m$ten Ordnung finden; so ist aus dem Vorhergehenden deutlich genug, daß das verlangte Aggregat nichts anders sei, als die $x$te figürliche Zahl von der folgenden Ordnung, nämlich von der $(m+1)$ten Ordnung. Folglich machen.

die x ersten beständigen Zahlen x

die x ersten natürlichen Zahlen $\frac{x(x+1)}{1.\ 2}$

die x ersten dreieckigen Zahlen $\frac{x(x+1)(x+2)}{1.\ 2.\ 3}$

die x ersten Pyramidalzahlen $\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$

die x ersten Z. von der 5ten Ord. $\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$

Also überhaupt

die x erst. Z. von der $m$ten Ordn. $\frac{x(x+1)(x+2)....(x+m-1)}{1.\ 2.\ 3\ ....\ m}$

Beispiel I. Es wird verlanget das Aggregat der 100 ersten natürlichen Zahlen, nämlich

$1+2+3+4+5+$ &c. . . . . $+100$

Hier ist in der Formel

$$\frac{x(x+1)}{1.\ 2}$$

$x = 100$. Also wird das Aggregat

$$\frac{100.(100+1)}{1.\ 2}$$

oder 50.101

oder 5050

Beispiel II. Man verlanget das Aggregat der 100 ersten dreieckigen Zahlen, so ist $x = 100$ in der Formel

$$\frac{x(x+1)(x+2)}{1.\ 2.\ 3}$$

und das verlangte Aggregat wird

$$\frac{100.(100+1).100+2)}{1.\ 2.\ 3}$$

und wenn man alles gehörig entwickelt

$$171700$$

Beispiel III. Man will wissen das Aggregat der 100 ersten Pyramidalzahlen, so ist $x = 100$ in der Formel

$$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$$

und man bekommt

$$\frac{100 \cdot 101 \cdot 102 \cdot 103}{1.\ 2.\ 3\ 4} = 4421275$$

§. 23.

Zu den gewöhnlichsten Reihen gehören die Folgen der Quadratzahlen, Kubikzahlen, u. s. f. wovon die Aggregate schon oben §. 13 und 15 gefunden worden.

Ferner

Ferner die Reihe der Potenzen als $a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \&c.$ welche nichts anders ist, als eine geometrische Fortschreitung, und nach den gewöhnlichen Regeln solcher Fortschreitungen behandelt werden kann.

Ferner die sogenannte harmonische oder musikalische Fortschreitung, wo die nämliche Zahl durch die Glieder einer arithmetischen Fortschreitung dividiret ist, als

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \&c.$$

$$\frac{7}{3}, \frac{7}{5}, \frac{7}{7}, \frac{7}{9}, \frac{7}{11}, \frac{7}{13}, \&c.$$

$$\frac{2}{5}, \frac{2}{8}, \frac{2}{11}, \frac{2}{14}, \frac{2}{17}, \&c.$$

Diese Arten Reihen werden deswegen harmonisch genannt, weil nach denselben und hauptsächlich nach der ersten, die Länge einer klingenden Saite eingetheilet wird, um die verschiedenen Töne in der Musik hervorzubringen. Weil die Alten viel auf Arithmetik, Geometrie und Musik hielten, so haben sie vermuthlich deswegen auch dreierlei Gleichverhältnisse und Fortschreitungen haben wollen, nämlich arithmetische, geometrische und musikalische. Uebrigens hat man noch keine Formel gefunden, wornach man das Aggregat der Glieder in einer harmonischen Fortschreitung machen könnte.

Die Reihe die am häufigsten vorkommt, ist die geometrische Fortschreitung. Sie ist schon hinlänglich an ihrem Orte abgehandelt worden. Hier wollen wir nur noch anmerken, daß das Aggregat derselben auch dann gefunden werden kann, wenn die Glieder ohne Ende abnehmen. Z. B. Bei dieser geometrischen Fortschreitung

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \&c. + \&c.$$

ist das erste Glied $\frac{1}{3}$, die Razion ist auch $\frac{1}{3}$. Weil die Glieder ohne Ende abnehmen, so kann man das letzte für o halten. Kehret man die Fortschreitung um, so ist das erste Glied o, der letzte $\frac{1}{3}$, die Razion 3. Folglich wird das Aggregat aller Glieder (IX. Hauptst. §. 29).

$$\frac{\frac{1}{3} - 0}{3 - 1} + \frac{1}{3}$$

das ist $\frac{1}{3} : 2 + \frac{1}{3}$

oder $\frac{1}{6} + \frac{1}{3}$

oder $\frac{1}{2}$

Folglich, wenn die Fortschreitung

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \&c.$$

ohne Ende fortgehet, so nähert sich das letzte Glied je mehr und mehr dem Nichts, und das Aggregat nähert sich ohne Ende dem $\frac{1}{2}$.

Sechszehntes Hauptstück.

Von den unendlich kleinen Veränderungen der Funkzionen, oder von der Differenzial-Rechnung.

§. 1.

Wir schreiten nun zu einem Theile der Rechenkunst, welcher zwar im gemeinen Leben keinen sonderlichen Nutzen hat, der aber in den mathematischen Wissenschaften desto wichtiger und unentbehrlicher ist. Wer die Theorie der unendlichen Größen nicht verstehet, kann es nicht wagen, in die Geheimniße der höheren Meßkunst und Mechanik einzudringen, und ist nicht einmal im Stande, die Schriften der großen Mathematiker zu verstehen; sondern er muß Zeitlebens bei den Anfangsgründen stehen bleiben. Wer also Willens ist, sich mit Ernst auf die Mathematik zu legen, der widme diesem und den folgenden Hauptstücken eine ganz besondere Aufmerksamkeit. Die Lehren, welche darin enthalten sind, haben im Grunde nicht mehr Schwierigkeit als viele von den vorhergehenden. Der Name des Unendlichen ist zwar für viele Anfänger abschreckend; aber wenn man nur die Sache mit Muth angreifet, so wird man bald sehen, daß auch hier alles hell und faßlich ist. Zu mehrerer Bequemlichkeit der Lernenden, werde ich die Lehren, welche ich noch vorzutragen habe, ganz von der Meßkunst absondern, damit sie auch von denen verstanden werden können, die noch von der Mathematik sonst nichts wissen, als was in diesem Buche vorgetragen worden.

§. 2.

d^2x, das dritte durch $\mathrm{dd}\mathrm{d}x$ oder d^3x, das vierte durch d^4x, und überhaupt das $n$te durch d^nx ausgedrucket.

Beispiel I. Es sei gegeben diese Gleichung

$$ay^2 = apx - px^2$$

Differenziret man zum ersten Male, so bekommt man

$$2ay\mathrm{d}y = ap\mathrm{d}x - 2px\mathrm{d}x$$

Will man nun zum zweiten Male differenziren, so behandele man y, x, $\mathrm{d}y$ und $\mathrm{d}x$ als veränderliche Größen. y hat wiederum $\mathrm{d}y$ zum Differenziale, x hat $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ hat d^2y, $\mathrm{d}x$ hat d^2x. Nach den gewöhnlichen Regeln ist also

$$\mathrm{d}(y\mathrm{d}y) = \mathrm{d}y\mathrm{d}y + y\mathrm{d}^2y$$
$$\mathrm{d}(\mathrm{d}x) = \mathrm{d}^2x$$
$$\mathrm{d}(x\mathrm{d}x) = \mathrm{d}x\mathrm{d}x + x\mathrm{d}^2x$$

Man bekommt also zur zweiten Differenzialgleichung

$$2a\mathrm{d}y^2 + 2ay\mathrm{d}^2y = ap\mathrm{d}^2x - 2p\mathrm{d}x^2 - 2px\mathrm{d}^2x.$$

Will man zum dritten Male differenziren,

so hat	y	zum	Differenziale				$\mathrm{d}y$
:	:	x	:	:	:	:	$\mathrm{d}x$
:	:	$\mathrm{d}y$	:	:	:	:	d^2y
:	:	$\mathrm{d}x$	:	:	:	:	d^2x
:	:	d^2y	:	:	:	:	d^3y
:	:	d^2x	:	:	:	:	d^3x

Nimmt man nun die Glieder eines nach dem andern vor, so ist

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}y^2) = 2\mathrm{d}y\mathrm{d}^2y$$
$$\mathrm{d}(y\mathrm{d}^2y) = \mathrm{d}y\mathrm{d}^2y + y\mathrm{d}^3y$$
$$\mathrm{d}(\mathrm{d}^2x) = \mathrm{d}^3x$$
$$\mathrm{d}(\mathrm{d}x^2) = 2\mathrm{d}x\mathrm{d}^2x$$
$$\mathrm{d}(x\mathrm{d}^2x) = \mathrm{d}x\mathrm{d}^2x + x\mathrm{d}^3x$$

Multipliziret man nun noch das Differenzial eines jeden Gliedes mit den beständigen Koeffizienten die dabei sind, so kommt

4ad

$$4ady\,d^2y + 2ady\,d^2y + 2ayd^3y = apd^3x - 4pdxd^2x$$
$$- 2pdxd^2x - 2pxd^3x$$
oder $6ady\,d^2y + 2ayd^3y = apd^3x - 6pdxd^2x - 2pxd^3x$

Auf eine ähnliche Art kann man zum vierten Male differenziren, indem man beobachtet, daß $d(d^3x) = d^4x$, $d(d^3y) = d^4y$. Und so kann man immer weiter gehen.

Beispiel II. Es sollen die nach einander folgenden Differenziale der Funkzion xy gefunden werden. Es sei

$$z = xy$$
so ist I) $dz = ydx + xdy$

Betrachtet man nun y, x, dy, dx und dz als veränderlich, so wird

$$d(dz) = d^2z$$
$$d(ydx) = dxdy + yd^2x$$
$$d(xdy) = dxdy + xd^2y$$

Folglich bekommt man

II) $d^2z = 2dxdy + yd^2x + xd^2y$

Betrachtet man nun y, x, dy, dx, d^2y, d^2x, und d^2z als veränderlich, so wird

$$d(d^2z) = d^3z$$
$$d(dxdy) = dyd^2x + dxd^2y$$
$$d(yd^2x) = dyd^2x + yd^3x$$
$$d(xd^2y) = dxd^2y + xd^3y$$

Daraus bekommt man

III) $d^3z = 3dyd^2x + 3dxd^2y + yd^3x + xd^3y$

Betrachtet man ferner y, x, dy, dx, d^2y, d^2x, d^3y, d^3x, d^3z als veränderlich, so wird

$$d(d^3z) = d^4z$$
$$d(dyd^2x) = d^2xd^2y + dyd^3x$$
$$d(dxd^2y) = d^2xd^2y + dxd^3y$$
$$d(yd^3x) = dyd^3x + yd^4x$$
$$d(xd^3y) = dxd^3y + xd^4y$$

Folglich,
$d^4z = 6d^2xd^2y + 4dyd^3x + 4dxd^3y + yd^4x + xd^4y$
und so kann man immer weiter gehen.

Beweis. Die unvollständigen Veränderungen der Funkzionen entstehen eigentlich aus den vollständigen, wenn man die Glieder wegläßt, die gegen die übrigen sehr klein sind. Man könnte also die unvollständigen Veränderungen nach der nämlichen Methode suchen wie die vollständigen. (XIV. Hauptst. §. 13). Es sei gegeben

$$z = xy$$

Man vergrößere z und dz, x um dx, y um dy, so bekommt man

$$z + dz = (x+dx)(y+dy)$$

Man entwickele das Produkt im zweiten Hauptgliede, und laße dabei den sehr kleinen Theil $dxdy$ weg, so hat man

beinahe $z + dz = xy + ydx + xdy$
ab. $z \quad = xy$

I) $dz = ydx + xdy$

Man vergrößere wiederum dz um d^2z, y um dy, x um dx, dy um d^2y, dx um d^2x, so entstehet

$$dz + d^2z = (y+dy)(dx+d^2x) + (x+dx)(dy+d^2y)$$

Man entwickele die Produkte, so entstehet eigentlich

$$dz + d^2z = ydx + 2dxdy + yd^2x + dyd^2x + xdy + xd^2y + dxd^2y$$

Hier müssen aber d^2z, d^2x, d^2y als noch weit kleinere Brüche als dz, dy, dx betrachtet werden. Man rechne also jedes zweite Differenzial für ein Produkt von zwei sehr kleinen Brüchen, und lasse die Glieder aus, welche mehr als zwei sehr kleine Ausmessungen enthalten, weil sie gegen die übrigen gar wenig ausmachen. Also fallen dyd^2x und dxd^2y weg, weil jedes dieser Glieder für drei sehr kleine Ausmessungen gezählet wird. Es ist folglich

beinahe

beinahe $dz + d^2z = ydx + 2dxdy + yd^2x + xdy + xd^2y$

abgez. $dz = ydx + xd^2y$

beinahe II. $d^2z = 3dxdy + yd^2x + xd^2y$.

Man vergrößere wiederum d^2z um d^3z, d^2y um d^3y, d^2x um d^3x, dy um d^2y, dx um d^2x, y um dy, x um dx, so wird

$$d^2z + d^3z = 2(dx + d^2x)(dy + d^2y) + (y + dy)(d^2x + d^3x) + (x + dx))d^2y + d^3x)$$

Man entwickele die Produkte zur rechten. Man rechne d^2y, d^2x für zwei sehr kleine Ausmessungen, hingegen d^3y, d^3x für drei sehr kleine Ausmessungen, und laße die Glieder weg, welche mehr als drei sehr kleine Ausmessungen ausmachen. Also

im Produkte $(dx + d^2x)(dy + d^2y)$ bleibet weg d^2xd^2y

" " " $(y + dy)(d^2x + d^3x)$ " " " dyd^3x

" " " $(x + dx)(d^2y + d^3y)$ " " " dxd^3y

Folglich kommt heraus

beinahe $d^2z + d^3z = 2dxdy + 3dyd^2x + 3dxd^2y + yd^2x + yd^3x + xd^2y + xd^3y$

abgezog. $d^2z \ldots = 2dxdy + yd^2x + xd^2y$

beinahe III) $d^3z = 3dyd^2x + 3dxd^2y + yd^3x + xd^3y$.

Und so kann man weiter gehen. Aus allem diesen siehet man daß das vorgeschriebene Verfahren im Grunde nur eine Verkürzung des weitläuftigeren ist, welches wir hier aus einander gesetzet haben. Weil bei den höheren Differenzialien, dy, dx, d^2y, d^2x, und so ferner, wiederum um ihr Differenzial vergrößert werden, weil auch bei den Produkten wiederum das vierte Glied als sehr klein ausgelaßen wird, weil bei jedem Produkte nach der Abziehung das erste Glied wegfällt; so verfähret man ganz sicher, wenn man die schon vorhandenen Differenziale als veränderliche Größen betrachtet, und übrigens eben so rechnet, wie bei der ersten Differenziazion.

Ein

Ein anderer Beweis. Man suche die vollständigen Veränderungen einer Funkzion, z. B. Es sei

$$z = xy$$

so ist $\Delta z = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$

$$\Delta^2 z = 2\Delta x\Delta y + y\Delta^2 x + x\Delta^2 y + 2\Delta x\Delta^2 y + 2\Delta y\Delta^2 x + \Delta^2 x\Delta^2 y$$

$$\Delta^3 z = 3\Delta x\Delta^2 y + 3\Delta y\Delta^2 x + 6\Delta^2 x\Delta^2 y + y\Delta^3 x + 3\Delta y\Delta^3 x + x\Delta^3 y + 3\Delta x\Delta^3 y + 3\Delta^2 x\Delta^3 y + 3\Delta^2 y\Delta^3 x + \Delta^3 x\Delta^3 y$$

&c. &c.

Nun nehme man an, Δx und Δy werden sehr kleine Brüche, $\Delta^2 x$ und $\Delta^2 y$ noch kleiner, so daß sie als Produkte von zwei sehr kleinen Brüchen betrachtet werden können, $\Delta^3 x$, $\Delta^3 y$ noch weit kleiner, so daß man sie als Produkte von drei sehr kleinen Brüchen betrachten könne. Dieses vorausgesetzet, so behalte man in der ersten Veränderung der Funkzion nur Glieder von einer einzigen sehr kleinen Ausmessung, in der zweiten Veränderung behalte man nur zwei sehr kleine Ausmessungen, in der dritten nur drei, u. s. f. so bekommt man

beinahe $\Delta z = y\Delta x + x\Delta y$

beinahe $\Delta^2 z = 2\Delta x\Delta y + y\Delta^2 x + x\Delta^2 y$

beinahe $\Delta^3 z = 3\Delta x\Delta^2 y + 3\Delta y\Delta^2 x + y\Delta^3 x + x\Delta^3 y$

&c. &c.

oder wenn man das Zeichen der sehr kleinen Veränderungen gebrauchet

$$\partial z = y\partial x + x\partial y$$

$$\partial^2 z = 2\partial x\partial y + y\partial^2 x + x\partial^2 y$$

$$\partial^3 z = 3\partial x\partial^2 y + 3\partial y\partial^2 x + y\partial^3 x + x\partial^3 y$$

&c. &c.

Man siehet, daß auf diese Art das nämliche herauskommt, was vermittelst der vorgeschriebenen Regel herausgebracht worden. Dieses bestätiget also die Regel durch die Erfahrung.

§. 23.

§. 23.

Wenn eine Größe beständig um gleich viel zunehmen soll, so findet hier auch dasjenige Statt, was bei den vollständigen Veränderungen bemerket worden. (XIV. Hauptst. §. 12. Zusatz). Es wird nämlich das beständige Differenzial z. B. dx eben so wie andere beständige Größen behandelt; oder es werden, nachdem die Differenziazion geschehen, die Glieder ausgelöschet, worinn sich die höheren Differenziale d^2x, d^3x, d^4x u. s. f. befinden.

Z. B. Man soll die auf einander folgenden Differenziale der Funkzion xy suchen, indem dx beständig ist; so bekommt man

$$z = xy$$
$$dz = ydx + xdy$$

Wird nun dx als beständig angesehen, so ist

$$d(dz) = d^2z$$
$$d(ydx) = dxdy$$
$$d(xdy) = dxdy + xd^2y$$

folglich

$$d^2z = 2dxdy + xd^2y$$

Ferner

$$d(d^2z) = d^3z$$
$$2d(dxdy) = 2dxd^2y$$
$$d(xd^2y) = dxd^2y + xd^3y$$

folglich

$$d^3z = 3dxd^2y + xd^3y$$

und so gehet man weiter. Oder man differenzire erstlich, als wenn kein Differenzial beständig wäre, so kommt

$$d^2z = 2dxdy + yd^2x + xd^2y$$
$$d^3z = 3dxd^2y + 3dyd^2x + yd^3x + xd^3y$$
$$\&c. \quad \&c.$$

Nun lasse man die Glieder weg, wo d^2x und d^2x vorkommen, weil $d^2x = 0$, $d^3x = 0$, &c. so bekommt man ebenfalls

$$d^2z = 2dxdy + xd^2y$$
$$d^3z = 3dxd^2y + xd^3y$$
&c. &c.

§. 24.

Wir haben beim Differenziren allemal vorausgesetzet, daß die veränderlichen Größen zunehmen, sollte aber das Gegentheil statt finden, und es wäre z. B. dy oder d^2y, oder d^3y verneinet, so müste vor allen Gliedern, welche eine unpaarige Potenz des verneinten Differenzials enthalten, das Zeichen + in — oder — in + verwandelt werden, wie schon bei den vollständigen Veränderungen bemerket worden (XIV. Hauptst. §. 13. Anm. 2) Indessen ist diese Verwandelung der Zeichen unnöthig. Man rechne immer als wenn die Differenziale bejahet wären; zuletzt muß sich im Resultat zeigen, ob etwas bejahetes oder verneintes herauskommt.

§. 25.

Aufgabe.

Die höheren Differenziale einer Gleichung von zwei veränderlichen Größen x und y finden, so daß alle Glieder die Razionen der Differenziale enthalten.

Auflösung. Nachdem man zum erstenmale differenziret hat, theile man die Gleichung durch dx, und setze $\frac{dy}{dx} = p$, so bekommt man eine Gleichung zwischen drei veränderlichen Größen x, y und p. Man differenzire, theile wiederum durch dx, und setze $\frac{dp}{dx} = q$, so bekommt man eine Gleichung zwischen den veränderlichen Größen x, y, p und

p und q. Man differenzire weiter, theile durch ∂x, und setze $\frac{\partial q}{\partial x} = r$. So fahre man fort, indem man annimmt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = q, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = r, \quad \frac{\partial r}{\partial x} = s, \quad \frac{\partial s}{\partial x} = t, \text{ u. s. f.}$$

Auf diese Art bekommt man sehr leicht die höheren Differenziale. Es bleibet aber noch übrig die Größen p, q, r, s, &c., durch Funkzionen von ∂y, $\partial^2 y$, $\partial^3 y$, &c. ∂x, $\partial^2 x$, $\partial^3 x$, &c., zu bestimmen.

Erstlich ist $p = \frac{\partial y}{\partial x}$, wie man es vorausgesetzet hat.

Die anderen Buchstaben q, r, s, &c., bekommen verschiedene Werthe, nachdem das eine oder andere Differenzial als beständig angesehen wird.

Wenn kein Differenzial beständig ist, so wird, wenn man nach den gewöhnlichen Regeln differenziret

$$q = \frac{\partial p}{\partial x} = \partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) : \partial x = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial x^2}$$

$$r = \frac{\partial q}{\partial x} = \partial\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^3} = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial x^2}\right) : \partial x$$

$$= \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 x}{\partial x^3} - 3\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 3\frac{\partial y}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}\right)^2$$

&c. &c.

Will man ∂x für beständig annehmen, so muß man in vorigen Formeln die Glieder austöschen, die durch $\partial^2 x$, $\partial^3 x$, &c., multipliziret sind, und man behält

$$q = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$r =$

$$r = \frac{d^3y}{dx^3}$$

$$s = \frac{d^4y}{dx^4}$$

&c. &c.

Ist dy beständig, so verschwinden die Glieder, welche d^2y, d^3y, u. s. f. enthalten, und es bleibet übrig

$$q = -\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2x}{dx^2}$$

$$r = -\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^3x}{dx^3} + 3\frac{dy}{dx}\cdot\left(\frac{d^2x}{dx^2}\right)^3$$

&c. &c.

Man kann auch irgend eine Funkzion der veränderlichen Größen und ihrer Differenziale als beständig betrachten. Gesetzet, es soll ydx beständig sein. Folglich muß das zweite Differenzial $d(ydx)$ null sein. Es wird also

$$d(ydx) = 0$$

oder $$dxdy + yd^2x = 0$$

$$yd^2x = -dxdy$$

$$d^2x = -\frac{dxdy}{y}$$

Diesen Werth von d^2x setze man in die Formel welche q ausdrucket, wenn nichts beständig ist, so kommt

$$q = \frac{d^2x}{dx^2} + \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

Dieses ist also der Werth von q, wenn ydx beständig ist. Man nehme wiederum die Gleichung

$$dxdy + yd^2x = 0$$

und

und differenzire zum zweiten Male, so kommt heraus

$$dyd^2x + dxd^2y + d^2xdy + yd^3x = 0$$

woraus man ziehet

$$d^3x = -\frac{2dyd^2x + dxd^3y}{y}$$

Diesen Werth von d^3x setze man in die Formel, welche r ausdrucket, wenn alles veränderlich ist, so entstehet

$$r = \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{4}{y}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

für den Fall wo ydx beständig ist.

Gesetzet es soll beständig sein $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ oder $(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}$, so hat man

$$d(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\tfrac{1}{2}(dx^2+dy^2)^{-\frac{1}{2}}d(dx^2+dy^2) = 0$$

oder wenn man beiderseits durch $\frac{1}{2}(dx^2+dy^2)^{-\frac{1}{2}}$ dividiret

$$d(dx^2+dy^2) = 0$$
$$2dxd^2x + 2dyd^2y = 0$$
$$dxd^2x + dyd^2y = 0$$
$$d^2x = \frac{-dyd^2y}{dx}$$

Setzet man diesen Werth von d^2x in der Formel die für q gilt, wenn alles veränderlich ist, so kommt

$$q = \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

für den Fall wo $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ beständig ist. Man nehme die Gleichung

$$dxd^2x + dyd^2y = 0$$

wieder vor, und differenzire, so kommt

$$d^2x^2 + dxd^3x + d^2y^2 + dyd^3y = 0$$

daher ist $d^3x = -\frac{d^2x^2 + d^2y^2 + dyd^3y}{dx}$

Wenn dieser Werth in die Formel gesetzet wird, welche r ausdrucket, wenn nichts beständig ist, so erhält man

$$r = \frac{d^3y}{dx^3} + 4\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \frac{d^3y}{dx^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$$

für den Fall wo $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ beständig ist.

Beispiel. Es sei

$$ay^5 = bx^4$$

so bekommt man, wenn man zum ersten Male differenziret.

$$5ay^4dy = 4bx^3dx$$

$$\text{oder} \quad 5ay^4\frac{dy}{dx} = 4bx^3$$

$$\text{oder} \quad 5ay^4p = 4bx^3$$

differenziret man zum zweiten Male, so kommt

$$20.apy^3dy + 5ay^4dp = 12bx^2dx$$

$$\text{oder} \quad 20.apy^3\frac{dy}{dx} + 5ay^4\frac{dp}{dx} = 12bx^2$$

$$\text{oder} \quad 20.ay^3p^2 + 5ay^4q = 12bx^2$$

Wenn man weiter differenziret, so erhält man

$$40.ay^3pdp + 60.ap^2y^2dy + 20.aqy^3dy + 5ay^4dq = 24.bxdx$$

$$\text{oder} \quad 40.ay^3p\frac{dp}{dx} + 60.ap^2y^2\frac{dy}{dx} + 20.aqy^3\frac{dy}{dx} + 5ay^4\frac{dq}{dx} = 24.bx$$

$$\text{oder} \quad 40.ay^3pq + 60.ay^2p^3 + 20.ay^3pq + 5ay^4r = 24.bx$$

und so weiter. Es bleibet nun noch übrig, daß man anstatt p, q und r ihre Werthe setze. Soll ∂x beständig sein, so wird

$$p = \frac{dy}{dx},\quad q = \frac{d^2y}{dx^2},\quad r = \frac{d^3y}{dx^3}.$$

Folg-

Folglich ist die zweite Differenzialgleichung

$$20.\ ay^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 5ay^4\frac{d^2y}{dx^2} = 12bx^2$$

und die dritte

$$60.\ ay^3\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + 60.\ ay^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 5ay^4\frac{d^3y}{dx^3} = 24bx$$

Soll ein anderes Differenzial beständig sein, so muß man anstatt q und r die Werthe setzen, die der Voraussetzung gemäß sind. Wenn nichts beständig sein soll, so wird die zweite Differenzialgleichung

$$20.\ ay^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 5ay^4\left[\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2x}{dx^2}\right] = 12bx^2$$

§. 26.

Aufgabe.

Eine Differenzial-Funkzion, oder Differenzial-Gleichung so verändern, daß ein anderes Differenzial oder gar keines darin beständig sei.

Auflösung. Wenn man weiß, welches Differenzial als beständig betrachtet worden, so suche man in derselben Voraussetzung die Werthe von d^2x, d^3x, &c., d^2y, d^3y, &c., in lauter Funkzionen von p, q, r, u. s. f. Diese Werthe setze man in die gegebene Funkzion oder Gleichung. Zuletzt setze man anstatt p, q, r, &c., die Werthe, welche diese Größen bekommen sollen, wenn ein anderes Differenzial beständig ist.

Beispiel I. Es sei gegeben diese Differenzial-Funkzion

$$\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)^3}}{dx\,d^2y}$$

welche gefunden worden, indem dx beständig war. Man will wissen, welche Gestalt die nämliche Differenzial-Funk-

zion bekommen muß, wenn $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ beständig ist. In der ersten Voraussetzung ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} = q$$

folglich $d^2y = q dx^2$

Man setze also $q dx^2$ anstatt d^2y, so entstehet

$$\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)^3}}{q dx^3}$$

In der neuen Voraussetzung wird aber

$$q = \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

Setzet man nun diesen Werth von q in die letztgefundene Funkzion, und machet man übrigens die gewöhnlichen Verkürzungen, so findet man

$$\frac{dx\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dy}$$

Und dieses ist die Gestalt, welche die gegebene Differenzial-Funkzion bekommen muß, wenn $\sqrt{(dx^2-dy^2)}$ beständig ist.

Beispiel II. Es sei gegeben

$$\frac{dx d^3y}{x d^2y}$$

worin dx beständig ist. Es soll aber nun ydx beständig sein. In der Voraussetzung daß dx beständig ist, hat man

$$q = \frac{d^2y}{dx^2}, \text{ folglich } d^2y = q dx^2$$

$$r = \frac{d^3y}{dx^3}, \text{ folglich } d^3y = r dx^3$$

Setzet

Setzet man diese Werthe von d^2y, d^3y in die gegebene Funkzion, so wird sie

$$\frac{r\mathrm{d}x^2}{xq}$$

Nun setze man anstatt r und p die Werthe, welche diese Größen erhalten, wenn $y\mathrm{d}x$ beständig ist, so kommt

$$\frac{\left[\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}+\frac{4}{y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{y^2}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3\right]\mathrm{d}x^2}{x\left[\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{y}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]}$$

oder wenn man die gewöhnlichen Verkürzungen anbringet

$$\frac{\mathrm{d}x(y^2\mathrm{d}^3y+4y\mathrm{d}y\mathrm{d}^2y+\mathrm{d}y^3)}{xy^2\mathrm{d}^2y+xy\mathrm{d}y^2}$$

diese Gestalt bekommt die Funkzion, wenn $y\mathrm{d}x$ beständig sein soll.

§. 27.

Eine Differenzial-Funkzion von zwei veränderlichen Größen, behält immer den nämlichen Werth, man mag das eine oder das andere Differenzial als beständig betrachten.

Es sei y eine Funkzion von x, so kann die Gleichung zwischen y und x allemal durch eine endliche oder unendliche Reihe von dieser Gestalt ausgedrucket werden

$$y = A + Bx^a + Cx^b + Dx^c + Ex^d + \&c.$$

Wir wollen anfänglich nur zwei Glieder dieser Reihe betrachten. Es sei also

$$y = A + Bx^n$$

Wenn man zum ersten Male differenziret, so wird

$$\mathrm{d}y = nBx^{n-1}\mathrm{d}x$$

oder $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = nBx^{n-1}$$

oder, wenn man, wie im vorigen Paragraph annimmt $\frac{dy}{dx} = p$, so ist

$$p = nBx^{n-1}$$

Man differenzire zum zweiten Male, so ist

$$dp = n(n-1)Bx^{n-2}dx$$

$$\text{oder } \frac{dp}{dx} = n(n-1)Bx^{n-2}$$

oder, wenn man setzet $\frac{dp}{dx} = q$

$$q = n(n-1)Bx^{n-2}$$

Man differenzire zum drittenmale, so wird

$$dq = n(n-1)(n-2)Bx^{n-3}dx$$

$$\text{oder } \frac{dq}{dx} = n(n-1)(n-2)Bx^{n-3}$$

oder, wenn man annimmt $\frac{dq}{dx} = r$,

$$r = n(n-1)(n-2)Bx^{n-3}$$

Es ist, mit einem Worte

$$p = nBx^{n-1}$$
$$q = n(n-1)Bx^{n-2}$$
$$r = n(n-1)(n-2)Bx^{n-3}$$
$$\&c. \quad \&c.$$

Hier siehet man freilich, daß p, q, r, &c. verschiedene Gestalten annehmen werden, nachdem man dx, oder dy oder ydx oder $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, u. s. f. oder auch gar kein Differenzial für beständig annehmen wird. Aber dessen unerachtet werden die Größen p, q, r, allemal den nämlichen Werth behalten, welcher durch das zweite Glied jeder Gleichung ausgedrucket ist. Das nämliche findet Statt, wenn mehrere Glieder da sind, welche den Werth von y ausdrucken.

Nun

Nun aber kann jede Differenzial-Funkzion in eine Funkzion von p, q, r, u. s. f. verwandelt werden, wie man im vorigen Paragraph gesehen hat. Da also die Werthe von p, q, r, &c., die nämlichen bleiben, man mag für beständig ansehen, welches Differenzial man will, so kann folglich jede aufgegebene Differenzial-Funkzion wohl der Gestalt nach verändert werden; es bleibet aber ihr Werth unverändert.

§. 28.

Nachdem man eine Funkzion differenziret hat, wenn man alle Glieder sammlet, die mit dem nämlichen Differenziale multipliziret sind, so bekommt man ein **theilhaftes Differenzial** (différence partielle).

Zum Beispiel, man differenzire diese Funkzion

$$ax^2yz + bxyz^2$$

so kommt $(2axyz + byz^2)dx + (ax^2z + bxz^2)dy + (ax^2y + 2bxyz)dz$

Dieses sind die drei theilhaften Differenziale der gegebenen Funkzion.

Wenn eine gegebene Differenzial-Funkzion die gehörigen Glieder, also die gehörigen theilhaften Differenziale enthält, so nennet man sie ein **richtiges Differenzial** (différentielle exacte). Es giebt gewisse Verhältnisse welche Statt finden müssen, wenn ein Differenzial richtig sein soll. Die Gleichungen welche solche Verhältnisse ausdrucken, werden **bedingende Gleichungen** (équations de condition) genannt.

§. 29.

Aufgabe.

Die theilhaften Differenziale einer Funkzion finden.

Auflösung. Man differenzire die gegebene Funkzion erstlich nur in Betrachtung einer einzigen veränderlichen

Gröſſe, und behandele die übrigen, als wären sie beſtändig. Eben so verfahre man mit der zweiten, dritten, u. ſ. f. veränderlichen Gröſſe. So bekommt man alle theilhafte Differenziale.

Beiſpiel. Es ſei die gegebene Funkzion

$$ax^n y^m z^k$$

So bekommt man, wenn x allein veränderlich iſt

$$any^m z^k x^{n-1} dx$$

Wenn y allein veränderlich iſt

$$amx^n z^k x^{m-1} dy$$

und wenn z allein veränderlich iſt

$$akx^n y^m z^{k-1} dz$$

Dieſes ſind die drei theilhaften Differenziale. Nimmt man ſie alle drei zuſammen, ſo bekommt man das richtige Differenzial

$$any^m z^k x^{n-1} dx + amx^n z^k y^{m-1} dy + akx^n y^m z^{k-1} dz.$$

Auf eine ähnliche Art muß man verfahren, wenn die Funkzion aus mehreren Gliedern beſtehet.

Beweis. Dieſes folget aus dem Begriffe der theilhafte Differenziale (§. 28).

Zuſatz. Hieraus entſtehet ein neuer Weg, um die Funkzionen mehrerer veränderlicher Gröſſen zu differenziren. Man darf nur für jede veränderliche Gröſſe beſonders differenziren, und hernach die theilhaften Differenziale zuſammen nehmen. Geſetzet es ſoll differenziret werden

$$\sqrt[3]{(x^3 + yz^2)} \text{ oder } (x^3 + yz^2)^{\frac{1}{3}}$$

Wenn man für x allein differenziret, ſo kommt

$$(x^3 + yz^2)^{-\frac{2}{3}} x^2 dx$$

Für

Für y allein kommt

$$\tfrac{1}{3}(x^3+yz^2)^{-\frac{2}{3}}z^2dy$$

Für z allein kommt

$$\tfrac{2}{3}(x^3+yz^2)^{-\frac{2}{3}}yzdz$$

Folglich ist das richtige Differenzial

$$(x^3+yz^2)^{-\frac{2}{3}}x^2dx+\tfrac{1}{3}(x^3+yz^2)^{-\frac{2}{3}}z^2dy+\tfrac{2}{3}(x^3+yz^2)^{-\frac{2}{3}}yzdz$$

oder $$(x^3+yz^2)^{-\frac{2}{3}}(x^2dx+\tfrac{1}{3}z^2dy+\tfrac{2}{3}yzdz)$$

oder $$\frac{x^2dx+\frac{1}{3}z^2dy+\frac{2}{3}yzdz}{\sqrt[3]{(x^3+yz^2)^2}}$$

oder $$\frac{3x^2dx+z^2dy+2yzdz}{3\sqrt[3]{(x^3+yz^2)^2}}$$

§. 30.

Es seien in dem richtigen Differenziale einer Funkzion von zwei veränderlichen Größen x und y, die beiden theilhaften Differenziale Mdy und Ndx, wo unter M und N Funkzionen von x und y verstanden werden. Wenn man die Funkzion M in Betrachtung des x allein, und N in Betrachtung des y allein differenziret, so müssen die Koeffizienten von dx in dem einen, und von dy in dem anderen dieser Differenziale einander gleich sein.

Um dieses zu beweisen, sei z eine Funkzion von x und y, und es werde

$$dz=Mdy+Ndx$$

so daß M und N Funkzionen von x und y vorstellen. Man stelle sich vor, daß die Funkzion z zu u werde, wenn man in derselben $y+dy$ anstatt y setzet, und die Potenzen von dy wegläßt, die da höher sind, als die erste.

Ziehet man nun ζ von Π ab, so bekommt man das Differenzial der Funkzion in Betrachtung des y allein, als wenn x beständig wäre. Folglich ist

$$\Pi - \zeta = M dy$$

Ferner stelle man sich vor, daß ζ zu Λ werde, wenn man $x + dx$ anstatt x seßet, und die höheren Potenzen von dx weglässt. Wenn man nun ζ abziehet, so bekommt man das Differenzial in Betrachtung des x allein, und folglich wird

$$\Lambda - \zeta = N dx$$

Geseßet, die Funkzion ζ wird zu Z, wenn man darinn sowohl x um dx als y um dy vergrößert, und immer die höheren Potenzen von dx und dy ausläßt. Wenn man in Π, wo schon y um dy vergrößert ist, noch x um dx vergrößert, so muß Π auch $= Z$ werden; und wenn man in Λ, wo x schon um dx vergrößert ist noch y um dy vergrößert, so muß ebenfalls $\Lambda = Z$ werden.

Laßt uns nun diese Gleichung

$$M dy = \Pi - \zeta$$

in Betrachtung des x allein differenziren. Wir wollen annehmen, es sei $dM = m dx$, wenn y unverändert bleibet. Um das zweite Glied der Gleichung in Betrachtung des x allein zu differenziren, muß man in $\Pi - \zeta$, $x + dx$ anstatt x seßen, und $\Pi - \zeta$ subtrahiren. Seßet man $x + dx$ anstatt x in Π, so wird Π zu Z. Seßet man auch in ζ, $x + dx$ anstatt x, so wird ζ zu Λ, also wird $\Pi - \zeta$ zu $Z - \Lambda$, und wenn man $\Pi - \zeta$ abziehet, so wird

$$m dx dy = (Z - \Lambda) - (\Pi - \zeta)$$

oder $$m dx dy = Z - \Lambda - \Pi + \zeta$$

Nun müssen wir auch die andere Gleichung in Betrachtung des y differenziren, nämlich

$$N dx = \Lambda - \zeta$$

Geseß-

Geſetzet, es ſey $dN = ndy$. Wenn man in Λ, wo ſchon x um dx vergrößert worden, noch y um dy vergrößert, ſo wird Λ zu Z. Hingegen, wenn man in ζ, das y um dy vergrößert, ſo wird $Z = \Pi$. Alſo wird $\Lambda - \zeta$ zu $Z - \Pi$ Subtrahiret man davon $\Lambda - \zeta$, ſo wird

$$ndydx = (Z - \Pi) - (\Lambda - \zeta)$$

oder $$ndydx = Z - \Pi - \Lambda + \zeta$$

Es iſt alſo

$$mdxdy = Z - \Lambda - \Pi + \zeta$$

oder $$ndydx = Z - \Pi - \Lambda + \zeta$$

folglich iſt $mdxdy = ndydx$, und alſo auch $n = m$. Das heißt, in der Gleichung

$$d\zeta = Mdy + Ndx$$

wenn $dM = mdx$ in Betrachtung des x allein, und $dN = ndy$ in Betrachtung des y allein, ſo muß nothwendig $m = n$ ſein.

Wir wollen zum Beiſpiel dieſe Funkzion nehmen

$$ax^2y^2 + by^3 + cxy$$

Man differenzire, ſo kommt

$$(2ax^2y + 3by^2 + cx)dy + (2ay^2x + cy)dx$$

Hier iſt

$$M = 2ax^2y + 3by^2 + cx$$

und $$N = 2ay^2x + cy$$

Man differenzire M in Betrachtung des x allein, und als wenn y beſtändig wäre, ſo kommt

$$(4axy + c)dx$$

und hier iſt

$$m = 4ax + c$$

Man differenzire auch N in Betrachtung des y allein, ſo kommt

$$(4axy + e)dy$$

Hier

Hier ist $n = 4axy + c$, und man siehet, daß $n = m$.

§. 31.

In einer Differenzial-Funkzion von mehr als zwei veränderlichen Größen; wenn man die theilhaften Differenziale zwei und zwei vornimmt, und jeden Koeffizienten in Betrachtung der anderen veränderlichen Größe differenziret; so werden die beiden neuen Koeffizienten einander gleich.

Es sei gegeben folgende Funkzion von vier veränderlichen Größen

$$vxyz + v^2z^2 + x^3y + yz^4$$

so wird das Differenzial

$$\begin{aligned}&(xyz + 2z^2v)dv\\ &+(vyz + 3yx^2)dx\\ &+(vxz + x^3 + z^4)dy\\ &+(vxy + 2v^2z + 4yz^3)dz\end{aligned}$$

Wenn man nur in Betrachtung des v und x allein differenziret hätte, so würde man bekommen haben

$$\begin{aligned}&(xyz + 2z^2v)dv\\ &+(vyz + 3yx^2)dx\end{aligned}$$

Und zufolge des vorigen Paragraphs muß $xyz + 2z^2v$, in Betrachtung des x differenziret, den nämlichen Koeffizienten geben als $vyz + 3yx^2$, in Betrachtung des v differenziret.

Wird die Funkzion in Betrachtung des v und y differenziret, so kommt

$$\begin{aligned}&(xyz + 2vz^2)dv\\ &+(vxz + x^3 + z^4)dy\end{aligned}$$

und hier muß $xyz + 2vz^2$, in Betrachtung des y differenzi-

renziret, einen eben so großen Koeffizienten geben, als wenn man $vxz + x^3 + z^4$ in Betrachtung des v differenziret. Eben diese Bewandniß hat es mit jedem anderen Paare der theilhaften Differenziale.

Zusatz. Es sei überhaupt

$$\partial U = M\partial v + N\partial x + P\partial y + Q\partial z$$

wo U eine Funkzion von v, x, y und z ist, und wo M, N, P, Q, die Koeffizienten der theilhaften Differenziale sind. Nimmt man die theilhafte Differenziale paarweise, so entstehen folgende Verhältnisse

I°) M, in Betrachtung des x differenziret
$= N$, in Betrachtung des v differenziret.

II°) M, in Betrachtung des y differenziret
$= P$, in Betrachtung des v differenziret.

III°) M, in Betrachtung des z differenziret
$= Q$, in Betrachtung des v differenziret.

IV°) N, in Betrachtung des y differenziret
$= P$, in Betrachtung des x differenziret.

V°) N, in Betrachtung des z differenziret
$= Q$, in Betrachtung des x differenziret.

VI°) P, in Betrachtung des z differenziret
$= Q$, in Betrachtung des y differenziret.

Diese Verhältnisse können folgender Maßen kürzer ausgedrucket werden.

I°) ∂M für $x = \partial N$ für v
II°) ∂M für $y = \partial P$ für v
III°) ∂M für $z = \partial Q$ für v
IV°) ∂N für $y = \partial P$ für x
V°) ∂N für $z = \partial Q$ für x
VI°) ∂P für $z = \partial Q$ für y

Jedoch

Jedoch bei allen diesen Gleichungen verstehet sich, daß nur die Koeffizienten gleich sind. Es sei z. B.

$$\partial M \text{ für } x = m\partial x$$
$$\partial N \text{ für } y = n\partial y$$

so ist nicht eigentlich $m\partial x = n\partial y$, sondern $m = n$. Dividiret man also vorige beide Gleichungen, die erste durch ∂x, und die andere durch ∂y, so entstehet

$$\frac{\partial M}{\partial x} \text{ für } x = m$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} \text{ für } y = n$$

und weil $m = n$, so ist

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}$$

wohl verstanden, daß hier in jedem Zähler nur in Betrachtung der Größe differenziret wird, deren Differenzial im Nenner stehet. Dieses vorausgesetzet, so können die sechs obigen Verhältnisse auch folgender Maßen ausgedrucket werden

$$\text{I°) } \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}$$
$$\text{II°) } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}$$
$$\text{III°) } \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial y}$$
$$\text{IV°) } \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x}$$
$$\text{V°) } \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

VI°)

$$VI°)\ \frac{dP}{dz} = \frac{dQ}{dy}$$

Diese sechs Gleichungen sind lauter bedingende Gleichungen (§. 28) welche Statt finden müssen, wenn das Differenzial einer Funkzion von v, x, y, z richtig sein soll. Auf eine ganz ähnliche Art findet man die bedingenden Gleichungen für mehr oder weniger als vier veränderliche Größen.

§. 32.

Wenn $dz = Mdy + Ndx$, und z eine gleichartige Funkzion von x und y ist, von der $n$ten Ordnung ist, so wird $nz = My + Nx$.

Es sei $y = qx$, wo q eine Funkzion von x und beständigen Größen vorstellet. Man setze in der Funkzion z allenthalben qx anstatt x, und es werde dadurch M zu M′, N zu N′, und z zu Qx^n. Es wird also sein

$$d(Qx^n) = M'dy + N'dx$$

Weil nun $y = qx$, so ist $dy = qdx + xdq$, folglich

$$d(Qx^n) = M'(qdx + xdb) + N'dx$$
$$\text{oder } d(Qx^n) = M'qdx + M'xdq + N'dx$$
$$\text{oder } d(Qx^n) = (M'q + N')dx + M'xdq$$

In dieser lezten Gleichung, ist $(M'q + N')dx$ das Differenzial von Qx^n in Betrachtung des x allein. Wenn man also Qx^n in Betrachtung des x allein differenziret, so entstehet

$$nQx^{n-1}dx = (M'q + N')dx$$
$$\text{und } nQx^{n-1} = M'q + N'$$
$$\text{oder } \frac{n}{x}Qx^n = M'q + N'$$

Weil wir angenommen haben $y = qx$, so ist $q = \frac{y}{x}$.

Setzet

Setzet man also wiederum $\frac{y}{x}$ anstatt q, so muß M' wiederum zu M werden, N' zu N und Qx^n zu z. Es wird folglich

$$\frac{n}{x}z = M\frac{y}{x} + N$$
$$\text{oder} \quad nz = My + Nx$$

Also, wenn $dz = Mdy + Ndx$, und z ist eine gleichartige Funktion von x und y, von der $n$ten Ordnung, so entstehet z, $n$mal, wenn man jeden Koeffizienten der theilhaften Differenziale, mit jeder veränderlichen Größe multiplizirt.

Es sei folgende Funktion gegeben

$$z = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + fy^3$$
$$\text{so ist} \quad dz = (bx^2 + 2cxy + 3fy^2)dy + (3ax^2 + 2byx + cy^2)dx$$

Man multiplizire den ersten Koeffizienten mit y, den zweiten mit x, und addire beide Produkte.

$$\begin{array}{r} bx^2y + 2cxy^2 + 3fy^3 \\ + 3ax^3 + 2bx^2y + cxy^2 \\ \hline 3ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + 3fy^3 \end{array}$$
$$\text{oder} \quad 3(ax^3 + bx^2y + cxy^2 + fy^3) = 3z$$

Hier hat man also aus beiden theilhaften Differenzialen die gleichartige Funktion, woraus sie entstanden sind, so viel mal gefunden, als die Funktion veränderliche Abmessungen hat.

§. 33.

Es sei $dz = Mdy + Ndx$, und z sei eine gleichartige Funktion von x von der $n$ten Ordnung, so sind die Koeffizienten der theilhaften Differenziale, nämlich M

und

und N auch gleichartige Funkzionen von x und y, aber von der $n-1$ten Ordnung.

Es sei $z = x^r y^s$

so wird $dz = ry^s x^{r-1} dx + sx^r y^{s-1} dy$

Hier siehet man, daß die Koeffizienten $ry^s x^{r-1}$ und $sx^r y^{s-1}$ eine veränderliche Ausmessung weniger haben als z. Das nämliche muß geschehen, wenn die Funkzion z aus mehr gleichartigen Gliedern bestehet.

Siebenzehntes Hauptstück.

Von einigen Anwendungen der Differenzial-Rechnung.

§. 1.

Aufgabe.

Die vollständige Veränderung einer Funkzion von x, vermittelst der unvollständigen oder unendlich kleinen Veränderungen, finden.

Auflösung. Es sei y gleich einer Funkzion von x, so wird

$$\Delta y = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{\Delta x}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{dx^3}{1.2.3} + \frac{d^4y}{dx^4}\cdot\frac{dx^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

eine Formel worinn dx als beständig angesehen wird. Das heißt, man differenziret die gegebene Gleichung zwischen y und x mehrmal nach einander, indem man dx als beständig behandelt. Man ziehet aus den Differenzial-Gleichungen die Werthe von $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, &c. Man multiplizirt $\frac{dy}{dx}$ mit Δx, das ist, mit der Größe, um welche x zunehmen soll. Man multiplizirt $\frac{d^2y}{dx^2}$ mit $\frac{\Delta x^2}{1.2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ mit $\frac{\Delta x^3}{1.2.3}$, u. s. f. Das Aggregat aller dieser Produkte, ins Unendliche fortgesetzet, giebet Δy oder die Vergrößerung des y.

Beweis.

Beweis. Wie auch die Funkzion beschaffen sei, so läßt sie doch allemal durch eine Reihe von dieser Gestalt vorstellen.

$$y = a + bx^m + cx^n + ex^r + \&c.$$

Wir wollen nur annehmen, es sei

$$y = a + bx^m$$

denn was vom Gliede bx^m gelten wird, muß auch von allen übrigen gelten. Ist $y = a + bx^m$, so wird

$$\Delta y = bmx^{m-1}\Delta x^2 + b\frac{m(m-1)}{1.\ 2}x^{m-2}\Delta x^2 + b\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}x^{m-3}\Delta x^3 + b\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}x^{m-4}\Delta x^4 + \&c.$$

Man suche nun die auf einander folgende Differenziale von $y = a + bx^m$ und betrachte dx als beständig, so ist

$$dy = bmx^{m-1}$$
$$d^2y = bm(m-1)x^{m-2}\,dx^2$$
$$d^3y = bm(m-1)(m-2)x^{m-3}\,dx^3$$
$$d^4y = bm(m-1)(m-2)(m-3)x^{m-4}dx^4$$
$$\&c. \quad \&c.$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = bmx^{m-1}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = bm(m-1)x^{m-2}$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = bm(m-1)(m-2)x^{m-3}$$
$$\frac{d^4y}{dx^4} = bm(m-1)(m-2)(m-3)x^{m-4}$$
$$\&c. \quad \&c.$$

Ziehet man nun z von Π ab, so bekommt man das Differenzial der Funkzion in Betrachtung des y allein, als wenn x beständig wäre. Folglich ist

$$\Pi - z = M\,dy$$

Ferner stelle man sich vor, daß z zu Λ werde, wenn man $x + dx$ anstatt x seßet, und die höheren Potenzen von dx wegläßt. Wenn man nun z abziehet, so bekommt man das Differenzial in Betrachtung des x allein, und folglich wird

$$\Lambda - z = N\,dx$$

Geseßet, die Funkzion z wird zu Z, wenn man darinn sowohl x um dx als y um dy vergrößert, und immer die höheren Potenzen von dx und dy ausläßt. Wenn man in Π, wo schon y um dy vergrößert ist, noch x um dx vergrößert, so muß Π auch $= Z$ werden; und wenn man in Λ, wo x schon um dx vergrößert ist noch y um dy vergrößert, so muß ebenfalls $\Lambda = Z$ werden.

Laßt uns nun diese Gleichung

$$M\,dy = \Pi - z$$

in Betrachtung des x allein differenziren. Wir wollen annehmen, es sei $dM = m\,dx$, wenn y unverändert bleibet. Um das zweite Glied der Gleichung in Betrachtung des x allein zu differenziren, muß man in $\Pi - z$, $x + dx$ anstatt x seßen, und $\Pi - z$ subtrahiren. Seßet man $x + dx$ anstatt x in Π, so wird Π zu Z. Seßet man auch in z, $x + dx$ anstatt x, so wird z zu Λ, also wird $\Pi - z$ zu $Z - \Lambda$, und wenn man $\Pi - z$ abziehet, so wird

$$m\,dx\,dy = (Z - \Lambda) - (\Pi - z)$$

oder

$$m\,dx\,dy = Z - \Lambda - \Pi + z$$

Nun müssen wir auch die andere Gleichung in Betrachtung des y differenziren, nämlich

$$N\,dx = \Lambda - z$$

Geseß-

Gesetzet, es sei $dN = ndy$. Wenn man in Λ, wo schon x um dx vergrößert worden, noch y um dy vergrößert, so wird Λ zu Z. Hingegen, wenn man in ζ, das y um dy vergrößert, so wird $Z = \Pi$. Also wird $\Lambda - \zeta$ zu $Z - \Pi$ Subtrahiret man davon $\Lambda - \zeta$, so wird

$$ndydx = (Z - \Pi) - (\Lambda - \zeta)$$

oder $$ndydx = Z - \Pi - \Lambda + \zeta$$

Es ist also

$$mdxdy = Z - \Lambda - \Pi + \zeta$$

oder $$ndydx = Z - \Pi - \Lambda + \zeta$$

folglich ist $mdxdy = ndydx$, und also auch $n = m$. Das heißt, in der Gleichung

$$d\zeta = Mdy + Ndx$$

wenn $dM = mdx$ in Betrachtung des x allein, und $dN = ndy$ in Betrachtung des y allein, so muß nothwendig $m = n$ sein.

Wir wollen zum Beispiel diese Funkzion nehmen

$$ax^2y^2 + by^3 + cxy$$

Man differenzire, so kommt

$$(2ax^2y + 3by^2 + cx)dy + (2ay^2x + cy)dx$$

Hier ist

$$M = 2ax^2y + 3by^2 + cx$$

und $$N = 2ay^2x + cy$$

Man differenzire M in Betrachtung des x allein, und als wenn y beständig wäre, so kommt

$$(4axy + c)dx$$

und hier ist

$$m = 4ax + c$$

Man differenzire auch N in Betrachtung des y allein, so kommt

$$(4axy + c)dy$$

Hier

Hier ist $n = 4axy + c$, und man siehet, daß $n = m$.

§. 31.

In einer Differenzial-Funkzion von mehr als zwei veränderlichen Größen; wenn man die theilhaften Differenziale zwei und zwei vornimmt, und jeden Koeffizienten in Betrachtung der anderen veränderlichen Größe differenziret; so werden die beiden neuen Koeffizienten einander gleich.

Es sei gegeben folgende Funkzion von vier veränderlichen Größen

$$vxyz + v^2z^2 + x^3y + yz^4$$

so wird das Differenzial

$$\begin{aligned}&(xyz + 2z^2v)dv\\ &+(vyz + 3yx^2)dx\\ &+(vxz + x^3 + z^4)dy\\ &+(vxy + 2v^2z + 4yz^3)dz\end{aligned}$$

Wenn man nur in Betrachtung des v und x allein differenziret hätte, so würde man bekommen haben

$$\begin{aligned}&(xyz + 2z^2v)dv\\ &+(vyz + 3yx^2)dx\end{aligned}$$

Und zufolge des vorigen Paragraphs muß $xyz + 2z^2v$, in Betrachtung des x differenziret, den nämlichen Koeffizienten geben als $vyz + 3yx^2$, in Betrachtung des v differenziret.

Wird die Funkzion in Betrachtung des v und y differenziret, so kommt

$$\begin{aligned}&(xyz + 2vz^2)dv\\ &+(vxz + x^3 + z^4)dy\end{aligned}$$

und hier muß $xyz + 2vz^2$, in Betrachtung des y differenzi-

enziret, einen eben so großen Koeffizienten geben, als wenn man $vxz + x^3 + z^4$ in Betrachtung des v differenziret. Eben diese Bewandniß hat es mit jedem anderen Paare der theilhaften Differenziale.

Zusatz. Es sei überhaupt

$$\partial U = M\partial v + N\partial x + P\partial y + Q\partial z$$

wo U eine Funkzion von v, x, y und z ist, und wo M, N, P, Q, die Koeffizienten der theilhaften Differenziale sind. Nimmt man die theilhafte Differenziale paarweise, so entstehen folgende Verhältnisse

I°) M, in Betrachtung des x differenziret
$= N$, in Betrachtung des v differenziret.

II°) M, in Betrachtung des y differenziret
$= P$, in Betrachtung des v differenziret.

III°) M, in Betrachtung des z differenziret
$= Q$, in Betrachtung des v differenziret.

IV°) N, in Betrachtung des y differenziret
$= P$, in Betrachtung des x differenziret.

V°) N, in Betrachtung des z differenziret
$= Q$, in Betrachtung des x differenziret.

VI°) P, in Betrachtung des z differenziret
$= Q$, in Betrachtung des y differenziret.

Diese Verhältnisse können folgender Maßen kürzer ausgedrücket werden.

I°) ∂M für $x = \partial N$ für v
II°) ∂M für $y = \partial P$ für v
III°) ∂M für $z = \partial Q$ für v
IV°) ∂N für $y = \partial P$ für x
V°) ∂N für $z = \partial Q$ für x
VI°) ∂P für $z = \partial Q$ für y

Jedoch

Jedoch bei allen diesen Gleichungen verstehet sich, daß nur die Koeffizienten gleich sind. Es sei z. B.

$$\partial M \text{ für } x = m\partial x$$
$$\partial N \text{ für } y = n\partial y$$

so ist nicht eigentlich $m\partial x = n\partial y$, sondern $m = n$. Dividiret man also vorige beide Gleichungen, die erste durch ∂x, und die andere durch ∂y, so entstehet

$$\frac{\partial M}{\partial x} \text{ für } x = m$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} \text{ für } y = n$$

und weil $m = n$, so ist

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}$$

wohl verstanden, daß hier in jedem Zähler nur in Betrachtung der Größe differenziret wird, deren Differenzial im Nenner stehet. Dieses vorausgesetzet, so können die sechs obigen Verhältnisse auch folgender Maßen ausgedrucket werden

$$\text{I°) } \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}$$
$$\text{II°) } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}$$
$$\text{III°) } \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial y}$$
$$\text{IV°) } \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x}$$
$$\text{V°) } \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

VI°)

$$VI^{\circ}) \quad \frac{dP}{dz} = \frac{dQ}{dy}$$

Diese sechs Gleichungen sind lauter bedingende Gleichungen (§. 28) welche Statt finden müssen, wenn das Differenzial einer Funkzion von v, x, y, z richtig sein soll. Auf eine ganz ähnliche Art findet man die bedingenden Gleichungen für mehr oder weniger als vier veränderliche Größen.

§. 32.

Wenn $dz = Mdy + Ndx$, und z eine gleichartige Funkzion von x und y ist, von der $n$ten Ordnung ist, so wird $nz = My + Nx$.

Es sei $y = qx$, wo q eine Funkzion von x und beständigen Größen vorstellet. Man setze in der Funkzion z allenthalben qx anstatt x, und es werde dadurch M zu M', N zu N', und z zu Qx^n. Es wird also sein

$$d(Qx^n) = M'dy + N'dx$$

Weil nun $y = qx$, so ist $dy = qdx + xdq$, folglich

$$d(Qx^n) = M'(qdx + xdq) + N'dx$$
$$\text{oder } d(Qx^n) = M'qdx + M'xdq + N'dx$$
$$\text{oder } d(Qx^n) = (M'q + N')dx + M'xdq$$

In dieser lezten Gleichung, ist $(M'q + N')dx$ das Differenzial von Qx^n in Betrachtung des x allein. Wenn man also Qx^n in Betrachtung des x allein differenziret, so entstehet

$$nQx^{n-1}dx = (M'q + N')dx$$
$$\text{und } nQx^{n-1} = M'q + N'$$
$$\text{oder } \frac{n}{x}Qx^n = M'q + N'$$

Weil wir angenommen haben $y = qx$, so ist $q = \frac{y}{x}$.

Setzet

und N auch gleichartige Funktionen von x und y, aber von der $n-1$ten Ordnung.

Es sei $z = x^r y^s$

so wird $dz = ry^s x^{r-1} dx + sx^r y^{s-1} dy$

Hier siehet man, daß die Koefizienten $ry^s x^{r-1}$ und $sx^r y^{s-1}$ eine veränderliche Ausmessung weniger haben als z. Das nämliche muß geschehen, wenn die Funktion z aus mehr gleichartigen Gliedern bestehet.

Siebenzehntes Hauptstück.

Von einigen Anwendungen der Differenzial-Rechnung.

§. 1.

Aufgabe.

Die vollständige Veränderung einer Funkzion von x, vermittelst der unvollständigen oder unendlich kleinen Veränderungen, finden.

Auflösung. Es sei y gleich einer Funkzion von x, so wird

$$\Delta y = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{\Delta x}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{dx^3}{1.2.3} + \frac{d^4y}{dx^4}\cdot\frac{dx^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

eine Formel worinn dx als beständig angesehen wird. Das heißt, man differenziret die gegebene Gleichung zwischen y und x mehrmal nach einander, indem man dx als beständig behandelt. Man ziehet aus den Differenzial-Gleichungen die Werthe von $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, &c. Man multiplizirt $\frac{dy}{dx}$ mit Δx, das ist, mit der Größe, um welche x zunehmen soll. Man multiplizirt $\frac{d^2y}{dx^2}$ mit $\frac{\Delta x^2}{1.2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ mit $\frac{\Delta x^3}{1.2.3}$, u. s. f. Das Aggregat aller dieser Produkte, ins Unendliche fortgesetzet, giebet Δy oder die Vergrößerung des y.

Beweis.

Beweis. Wie auch die Funkzion beschaffen sei, so läßt sie doch allemal durch eine Reihe von dieser Gestalt vorstellen.

$$y = a + bx^m + cx^n + ex^s + \&c.$$

Wir wollen nur annehmen, es sei

$$y = a + bx^m$$

denn was vom Gliede bx^m gelten wird, muß auch von allen übrigen gelten. Ist $y = a + bx^m$, so wird

$$\begin{aligned}\Delta y = {} & bmx^{m-1}\Delta x^2 \\ & + b\frac{m(m-1)}{1.\ 2}x^{m-2}\Delta x^2 \\ & + b\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}x^{m-3}\Delta x^3 \\ & + b\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}x^{m-4}\Delta x^4 + \&c.\end{aligned}$$

Man suche nun die aufeinander folgende Differenziale von $y = a + bx^m$ und betrachte dx als beständig, so ist

$$\begin{aligned} dy &= bmx^{m-1} \\ d^2y &= bm(m-1)x^{m-2}\,dx^2 \\ d^3y &= bm(m-1)(m-2)x^{m-3}\,dx^3 \\ d^4y &= bm(m-1)(m-2)(m-3)x^{m-4}dx^4 \\ &\quad \&c. \quad \&c.\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= bmx^{m-1} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= bm(m-1)x^{m-2} \\ \frac{d^3y}{dx^3} &= bm(m-1)(m-2)x^{m-3} \\ \frac{d^4y}{dx^4} &= bm(m-1)(m-2)(m-3)x^{m-4} \\ &\quad \&c. \quad \&c.\end{aligned}$$

Multipliziret man nun $\frac{dy}{dx}$ mit $\frac{\Delta x}{1}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ mit $\frac{\Delta x^2}{1.2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ mit $\frac{\Delta x^3}{1.2.3}$, u. s. f. so wird

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{\Delta x}{1} = bmx^{m-1}\Delta x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2} = b\frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}\Delta x^2$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{1.2.3} = b\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^{m-3}\Delta x^3$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} \cdot \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4} = b\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}x^{m-4}\Delta x^4$$

&c. &c.

Es ist aber das Aggregat aller zweiten Hauptglieder dieser Gleichungen der oben gefundene Werth von Δy, folglich ist auch das Aggregat der ersten Glieder $= \Delta y$, und man hat

$$\Delta y = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\Delta x}{1} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \frac{dy^4}{dx^4} \cdot \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4} + \text{&c. &c.}$$

§. 2.

Aufgabe.

Vermittelst der Differenzial-Rechnung den Werth finden, welchen eine Funkzion von x bekommt, wenn x um Δx zunimmt.

Auflösung. Es sei y eine Funkzion von x. Es werde y zu Y, wenn x zu $x + \Delta x$ wird, so ist

$$Y = y + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\Delta x}{1} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \text{&c.}$$

eine Formel, worinn dx als beständig betrachtet werden muß.

Beweis.

Beweis. Aus vorigen §. ist

$$\Delta y = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\Delta x}{1} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \&c.$$

Folglich

$$y + \Delta y = y + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\Delta x}{1} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \&c.$$

Es ist aber $y + \Delta y$ nichts anders als Y. Also ist

$$Y = y + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\Delta x}{1} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \&c.$$

§. 3.

Aufgabe.

Eine zweitheilige Größe zu einer verneinten oder einer gebrochenen Potenz erheben.

Vorbereitung. Es sei $y = x^{-n}$, so bekommt man, wenn man differenziret, und dx beständig ist,

$$\frac{dy}{dx} = -nx^{-n-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -n(-n-1)x^{-n-2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -n(-n-1)(1-n-2)x^{-n-3}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -n(-n-1)(1-n-2)(-n-3)x^{-n-4}$$

&c. &c.

Setzet man diese Werthe von $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, Formel des vorigen Paragraphs, so wird

Y oder $(x+\Delta x)^{-n} = x^{-n}$

$$-nx^{-n-1}\Delta x + \frac{-n(-n-1)}{1.2}x^{-n-2}\Delta x^2 + \frac{-n(-n-1)(-n-2)}{1.2.3}x^{-n-3}$$

$$+ \frac{-n(-n-1)(-n-2)(-n-3)}{1.2.3.4}$$

&c. &c.

Es sei $y = x^{\frac{m}{n}}$, so wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)x^{\frac{m}{n}-2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)x^{\frac{m}{n}-3}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)\left(\frac{m}{n}-3\right)x^{\frac{m}{n}-4}$$

&c. &c.

Setzet man diese Werthe von $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3x}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, &c. in die Formel des vorigen Paragraphs, so wird

Y oder

$$Y \text{ oder } (x+\Delta x)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} \Delta x + \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)}{1.\ 2} x^{\frac{m}{n}-2} \Delta x^2 + \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)}{1.\ 2.\ 3} x^{\frac{m}{n}-3} \Delta x^3 + \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)\left(\frac{m}{n}-3\right)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} x^{\frac{m}{n}-4} \Delta x^4 \quad \&c. \quad \&c.$$

Wenn man nun anstatt $x+\Delta x$ setzet $a+b$, so bekommt man für verneinte Exponenten

$$(a+b)^{-n} = a^{-n} - na^{-n-1}b + \frac{-n(-n-1)}{1.\ 2} a^{-n-2}b^2 + \frac{-n(-n-1)(-n-2)}{1.\ 2.\ 3} a^{-n-3}b^3 + \&c.$$

und für gebrochene Exponenten

$$(a+b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} a^{\frac{m}{n}-1} b + \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)}{1.\ 2} a^{\frac{m}{n}-2} b^2 + \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)}{1.\ 2.\ 3} a^{\frac{m}{n}-3} b^3 + \&c.$$

Auflösung. Man halte sich bei verneinten und gebrochenen Exponenten an die Newtonische Regel (V. Hauptst. §. 29.) eben sowohl als bei ganzen und positiven Exponenten.

Anmerkung. Dieses ist was wir am angeführten Orte zu beweisen versprochen hatten. Vielleicht mögte

aber jemand dieſen Beweis für einen logiſchen Kreis halten. Dieſes wäre ungegründet. Denn aus Newtons Regel iſt bewieſen worden (XIV. Hauptſt. §. 4. Beiſp. IV.).

$$(x+\Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}\Delta x^2 + \&c.$$

und folglich

$$(x+\Delta x)^n - x^n \text{ oder } \Delta(x^n) = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}\Delta x^2 + \&c.$$

Hieraus iſt wiederum bewieſen worden (XVII. Hauptſt. §. 2) daß wenn Δx ſehr klein iſt,

$$\mathrm{d}(x^n) = nx^{n-1}\mathrm{d}x$$

Nun wird aus dieſer Differenziazionsregel und allem was daraus folget, bewieſen, daß

$$(x+\Delta x)^{-n} = x^{-n} - nx^{-n-1}\Delta x + \frac{-n(-n-1)}{1.\ 2}\Delta x^2 + \&c.$$

und $(x+\Delta x)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}\Delta x + \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)}{1.\ 2}x^{\frac{m}{n}-2}\Delta x^2$

$$+ \&c.$$

Weil der letzte Fall von dem erſten verſchieden iſt, ſo iſt hier kein logiſcher Kreis, als welcher nur dann Statt findet, wenn man aus der erſten Wahrheit die zweite, und aus der zweiten die erſte beweiſen will, ohne daß eine von beiden eine dritte Wahrheit zum Grunde habe.

Jedoch, fürchtet man ſich für allen Anſchein eines logiſchen Kreiſes, ſo braucht man nur die Differenziazion der Potenzen aus der Differenziazion der Produkte zu beweiſen, ohne Newtons Regel zur Hülfe zu nehmen. Es iſt nämlich

$$\mathrm{d}(vxyz) = xyz\mathrm{d}v + vyz\mathrm{d}x + vxz\mathrm{d}y + vxy\mathrm{d}z$$

Sind nun v, x, y, z einander gleich, und z. B. alle $= x$, ſo wird

$$\mathrm{d}(xxxx) = xxx\mathrm{d}x + xxx\mathrm{d}x + xxx\mathrm{d}x + xxx\mathrm{d}x$$

oder $\mathrm{d}(x^4) = 4x^{4-1}\mathrm{d}x$

wor-

woraus sich überhaupt schließen läßt daß

$$\partial(x^n) = nx^{n-1}\,\partial x$$

Aus dieser Formel kann nun, wie im XVII Hauptstücke §. 12 geschehen, hergeleitet werden, daß

$$\partial(x^{-n}) = -nx^{-n-1}\,\partial x$$

$$\partial(x^{\frac{m}{n}}) = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}\,\partial x$$

Und alle folgende Schlüsse und Formeln die darauf gebauet sind, beruhen gar nicht mehr auf Newtons Regel, folglich auch nicht die Formeln, welche wir für verneinte und gebrochene Potenzen zweitheiliger Größen gefunden haben. Daß diese Formeln mit Newtons Regel übereinstimmen, kann hier als eine zufällige Sache angesehen werden.

§. 4.

Aufgabe.

Den Werth des Verhältnisses $\frac{\partial y}{\partial x}$ finden, in dem Falle wo die Funkzion welche dieses Verhältniß ausdrucket, $\frac{0}{0}$ wird.

Vorbereitung. Es sei eine Gleichung von der $n$ten Ordnung zwischen x und y, welche diese Gestalt hat

$$\alpha+\beta x+\gamma y+\delta x^2+\varepsilon xy+\zeta y^2+yx^3+\&c.\ldots.=0$$

So bekommt die vollständige Veränderung diese Form (XIV. Hauptst. §. 15).

$$\left.\begin{array}{l} A\Delta x+B\Delta y+C\Delta x^2+D\Delta x\Delta y+E\Delta y^2+F\Delta x^3+\&c. \\ +a\Delta x^n+b\Delta x^{n-1}\Delta y+c\Delta x^{n-2}\Delta y^2+e\Delta x^{n-3}\Delta x^3+\&c. \end{array}\right\}=0$$

Läßt man die Glieder weg, wo mehr als eine Differenzial-Ausmessung ist, und setzet man dx und dy anstatt Δx und Δy, so behält man

$$Adx + Bdy = o$$

oder $$Bdy = -Adx$$

oder $$\frac{dy}{dx} = -\frac{A}{B}$$

und hier sind A und B Funkzionen von x und y. Es kann geschehen, daß für gewisse Werthe von x und y beide Funkzionen A und B zugleich o werden, und daß man bekomme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}$$

Dieser Ausdruck aber giebet keinen verständlichen Werth des Verhältnisses $\frac{dy}{dx}$. Folglich muß man suchen diesen Werth auf eine andere Art zu finden. Wenn A und B null werden, so verschwinden $A\Delta x$ und Bdy. Das Verhältniß zwischen Δx und Δy wird alsdann noch gegeben durch diese Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 + F\Delta x^3 + G\Delta x^2\Delta y + \&c. \\ + a\Delta x^n + b\Delta x^{n-1}\Delta y + c\Delta x^{n-2}\Delta y^2 + \&c. \end{array}\right\} = o$$

Wenn die Veränderungen sehr klein werden, so darf man nur die Glieder behalten, wo zwei Differenzial-Ausmessungen vorhanden sind, und schreiben

$$Cdx^2 + Ddxdy + Edy^2 = o$$

oder, nachdem man durch dx^2 dividiret hat

$$C + D\frac{dy}{dx} + E\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = o$$

Hier siehet man, daß man eine quadratische Gleichung auflösen müßte, um $\frac{dy}{dx}$ zu finden. Wir wollen ferner den

Fall

Fall setzen, daß C, D und E null werden, sowohl als A und B, so ist alsdann das Verhältniß zwischen Δx und Δy gegeben durch

$$\left.\begin{array}{l} F\Delta x^3 + G\Delta x^2\Delta y + H\Delta x\Delta y^2 + I\Delta y^3 + K\Delta x^4 + \&c. \\ + a\Delta x^n + b\Delta x^{n-1}\Delta y + c\Delta x^{n-2}\Delta y + e\Delta x^{n-3}\Delta y^3 + \&c. \end{array}\right\} = 0$$

Wenn man hier nur diejenigen Glieder behält, wo drei Differenzial-Ausmessungen vorhanden sind, so bekommt man

$$Fdx^3 + Gdx^2dy + Hdxdy^2 + Idy^3 = 0$$

oder, nachdem man durch dx^3 dividiret hat,

$$F + G\frac{dy}{dx} + H\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + I\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0$$

Man müßte also eine Gleichung vom dritten Grade auflösen, um $\frac{dy}{dx}$ zu bekommen. Man siehet leicht ein, daß eine Gleichung vom vierten Grade aufgelöset werden müßte, wenn auch F, G, H, I, null würden. Und so gehet es immer weiter. Wollte man auf solche Art den Werth von $\frac{dy}{dx}$ finden, so müßte man erstlich die Funkzionen A, B, C, D, E, F, G, H, I, u. s. f. haben. Und um diese Funkzionen zu erhalten, müßte man zur gegebenen Funkzion die vollständige Veränderung nehmen, welches aber meistens sehr beschwerlich sein würde. Hier kommt uns die Rechnung mit unvollständigen Veränderungen sehr zu Statten.

Man nehme die vollständige Veränderung der Funkzion $\alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2 + \eta x^3 + \theta x^2y + \iota xy^2 + \varkappa y^3$ so wie sie oben (XIV. Hauptst. §. 15) gefunden worden. Man bekommt

$$A = (\beta$$

$$\begin{aligned}
A\Delta x &= (\beta + 2\delta x + \varepsilon y + 3\eta x^2 + 2\theta xy + \iota y^2)\Delta x\\
+B\Delta y &= (\gamma + \varepsilon x + 2\zeta y + \theta x^2 + 2\iota xy + 3\varkappa y^2)\Delta y\\
+C\Delta x^2 &= (\delta + 3\eta x + \theta y)\Delta x^2\\
+D\Delta x\Delta y &= (\varepsilon + 2\theta x + 2\iota y)\Delta y\Delta x\\
+E\Delta y^2 &= (\zeta + \iota x + 3\varkappa y)\Delta y^2\\
&\quad + \eta\Delta x^3\\
&\quad + \theta\Delta x^2\Delta y\\
&\quad + \iota\Delta x\Delta y^2\\
&\quad + \varkappa\Delta y^3
\end{aligned}$$

Man schreibe allenthalben dx und dy anstatt Δx und Δy. Man setze

$$Adx + Bdy = 0$$

wo unter A die Funkzion $\beta + 2\delta x + \varepsilon y$ &c., und unter B die Funkzion $\gamma + \varepsilon x + 2\zeta y$ &c. verstanden wird. Man differenzire diese Gleichung, indem man dx und dy als beständig betrachtet, so wird man bekommen

$$Cdx^2 + Ddxdy + Edy^2 = 0$$

wo unter C verstanden wird $\delta + 3\eta x + \theta y$;
unter D, $\varepsilon + 2\theta x + 2\iota y$; unter E, $\zeta + \iota x + 3\varkappa y$.

Differenziret man diese letzte Gleichung wiederum in der Voraussetzung, daß dy und dx beständig sind, so bekommt man

$$\eta dx^3 + \theta dx^2 dy + \iota dx dy^2 + \varkappa dy^3 = 0$$

Mit einem Worte, in der vollständigen Veränderung einer heterogenen Funkzion von x und y, wenn ihr jede homogene Funkzion von Δx und Δy oder dx und dy, die darinn enthalten ist, null machet, so entstehet jede folgende Gleichung, wenn die vorige differenziret wird, und wenn sowohl dx als dy als beständig behandelt werden. Alle diese Gleichungen zwischen dx und dy, sind aber nichts anders als die oben angeführten Gleichungen vom zweiten, dritten Grade, u. s. f. die man auflösen muste, um den Werth

von

von $\frac{dy}{dx}$ zu finden, im Falle wo dieses Verhältniß $= \frac{0}{0}$ wird. Hieraus fließet nun folgendes Verfahren.

Auflösung. Gesetzet man hat eine Gleichung differenziret, und gefunden

$$Adx + Bdy = 0$$

wo A und B Funkzionen von x und y sind. Gesetzet, für einen gewissen Werth des x und des y, werde $A = 0$, und $B = 0$, folglich $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$. So fahre man fort, und differenzire immer weiter, in der Vorausseßung, daß dy und dx beständig sind. Man halte ein, so bald für $\frac{dy}{dx}$ ein wirklicher Werth gefunden wird.

Beispiel. Es sei gegeben diese Gleichung

$$2(y-b)^3 = 3(x-a)^3$$

so findet man anfänglich

$$2(y-b)^2 dy = 3(x-a)^2 dx$$

oder $$\frac{dy}{dx} = \frac{3(x-a)^2}{2(y-b)^2}$$

Man will den Werth des Verhältnisses $\frac{dy}{dx}$ haben, für den Fall wo $x = a$, und $y = b$. Es ist klar, daß in diesem Falle $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$. Man differenzire weiter, so kommt

$$2(y-b)dy^2 = 3(x-a)dx^2$$

oder $$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{3(x-a)}{2(y-b)}$$

Die-

Dieses giebt nach nichts, wenn $x = a$, und $y = b$. Man differenzire also zum dritten male, so hat man

$$2dy^3 = 3dx^3$$

$$\text{oder } \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = \frac{3}{2}$$

$$\text{folglich } \frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}.$$

Zusatz. Die angeführte Methode kann auch dienen, wenn man untersuchen will, was eine gegebene Funkzion von x wird, in dem Falle, wo sie sich bei einem gewissen Werthe des x in $\frac{0}{0}$ verwandelt. Es sei gegeben diese Funkzion

$$\frac{a - \sqrt{(a^2 - x^2)}}{x^2}$$

In dem Falle, wo $x = 0$, wird diese Funkzion $= \frac{0}{0}$. Nichts verhindert uns anzunehmen, daß die gegebene Funkzion der Ausdruck irgend eines Verhältnisses $\frac{dy}{dx}$ ist. Man setze also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a - \sqrt{(a^2 - x^2)}}{x^2}$$

$$\text{oder } x^2 dy = a dx - dx\sqrt{(a^2 - x^2)}$$

Man differenzire, und betrachte dx und dy als beständig, so kommt

$$2x dx dy = x dx^2 (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

oder, wenn man durch $x dx$ dividiret

$$2dy = dx(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{daher } \frac{dy}{dx} = \frac{(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

Wenn

Wenn nun $x = 0$, so wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2a}$$

Folglich siehet man, daß die Funkzion

$$\frac{a - \sqrt{(a^2 - x^2)}}{x^2} = \frac{1}{2a}$$

werden muß, wenn $x = 0$ ist. Wäre es nöthig gewesen, so hätte man müssen weiter differenziren.

§. 5.

Eine der vornehmsten Anwendungen der Differenzial-Rechnung bestehet in der Erfindung des größten oder kleinsten Werthes einer Funkzion. Wir haben schon oben (XVI. Hauptst. §. 13) kürzlich gesaget, was die äusserſten Werthe einer veränderlichen Größe sind. Wir wollen es aber hier noch etwas umständlicher erklären. Es sei y eine Funkzion von x. Wenn man dem x nach und nach einen größeren Werth beileget, so wird es oft geschehen, daß die Funkzion y entweder beständig zunimmt oder beständig abnimmt. Es kann sich aber auch treffen, daß y eine Zeitlang zunimmt und dann anfängt abzunehmen, oder daß y erstlich abnimmt und hernach zunimmt. In diesen Fällen giebt es einen Werth von y, der entweder der größte oder der kleinste von allen ist. Dieser Werth des y ist der äusserſte Werth desselben, welcher also entweder ein **Maximum** oder ein **Minimum**, das heißt ein **Größtes** oder ein **Kleinstes** ist. Der äusserſte Werth des y wird bestimmet, indem man angiebt, wie groß x sein muß, wenn y sein Maximum oder Minimum erreichet.

Es sei zum Beispiel

$$y^2 = 2x - x^2$$

oder

$$y = \sqrt{(2x - x^2)}$$

Setzet ihr $x = 1$, so wird $y = 1$. Nehmet ihr aber x größer oder kleiner als 1, zum Beispiel $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{5}{4}$, so wird y immer kleiner als 1. Nämlich y nimmt zu, so lange x unter 1 ist, und sich der 1 nähert, und fängt an abzunehmen, so bald x über 1 ist. Also ist $x = 1$ der Werth von x der das Maximum des y giebt, und weil aus $x = 1$ auch $y = 1$ entstehet, so ist $y = 1$ das Maximum des y oder der Funkzion $\sqrt{(2x - x^2)}$.

§. 6.

Wenn eine Funkzion so beschaffen ist, daß sie abnimmt, nachdem sie zugenommen hat, oder daß sie zunimmt, nachdem sie abgenommen hat, so muß ihr Differenzial null werden, in dem Augenblicke, wo sie ihr Maximum oder ihr Minimum erreichet.

So lange die Funkzion zunimmt, ist ihr Differenzial bejahet; so bald sie anfängt abzunehmen, wird ihr Differenzial verneinet. Oder umgekehret, die Veränderung ist anfänglich verneinet, so lange die Funkzion abnimmt, und wird hernach bejahet, so bald die Funkzion wieder zunimmt. Es muß aber eine Größe, die aus dem Bejaheten ins Verneinte, oder aus dem Verneinten ins Bejahete übergehet, im Augenblicke des Ueberganges null werden, weil Null der Scheidepunkt zwischen bejaheten und verneinten Größen ist. Folglich muß das Differenzial null sein, wenn die Funkzion ihr Maximum oder Minimum erreichet hat.

Zum Beispiel es sei wiederum

$$y = \sqrt{(2x - x^2)}$$

so wird $$dy = \frac{(1 - x)\,dx}{\sqrt{(2x - x^2)}}$$

y erreichet sein Maximum in dem Augenblicke wo $x = 1$, und in dem nämlichen Augenblicke muß $dy = 0$ werden, welches auch in der That geschiehet. Denn in der letzten Gleichung setze man $x = 1$, so hat man

dy

$$dy = \frac{(1-x)dx}{\sqrt{(2x-x^2)}} = 0$$

Weil nun $dy = 0$ im Augenblicke wo y ein Maximum oder Minimum ist, so wird auch im nämlichen Augenblicke $\frac{dy}{dx} = 0$. Z. B. Weil

$$dy = \frac{(1-x)dx}{\sqrt{(2x-x^2)}}$$

so ist $\frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{\sqrt{(2x-x^2)}}$

und hier wird $\frac{dy}{dx} = 0$, wenn man 1 anstatt x schreibet.

Man kann also auch sagen, daß $\frac{dy}{dx} = 0$ wird, wenn y ein Maximum wird.

Zusatz. Der nämliche Lehrsatz kann auch folgender Weise erkläret werden. Eine Größe nimmt zu, so lange dasjenige, was man ansetzet, größer ist, als was man abnimmt; und sie nimmt ab, wenn dasjenige was man abnimmt, größer ist, als was man zusetzet. In der Veränderung einer Funkzion zeigen die bejaheten Glieder das Zugesetzte und die verneinten das Abgenommene an. Also nimmt die Funkzion zu, so lange als die bejaheten Glieder in der Veränderung größer sind, als die verneinten. Es sei immer

$$y = \sqrt{(2x-x^2)}$$

folglich $dy = \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}} - \frac{xdx}{\sqrt{(2x-x^2)}}$

Es wird also y zunehmen, so lange $\frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}}$ größer sein wird als $\frac{xdx}{\sqrt{(2x-x^2)}}$, das ist, so lange als

$$\frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}} > \frac{xdx}{\sqrt{(2x-x^2)}}$$

oder $$\frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}} - \frac{xdx}{\sqrt{(2x-x^2)}} > 0$$

Folglich hat das Zunehmen ein Ende, so bald diese Ungleichheit nicht mehr Statt findet, das ist, so bald das Bejahete dem Verneinten gleich wird, oder sobald

$$\frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}} = \frac{xdx}{\sqrt{(2x-x^2)}}$$

oder $$\frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}} - \frac{xdx}{\sqrt{(2x-x^2)}} = 0$$

oder, weil hier das erste Glied eben so viel ist als dy, so bald

$$dy = 0$$

Es ist wahr, daß in dem Ausdrucke

$$\frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}} > \frac{xdx}{\sqrt{(2x-x^2)}}$$

unendlich viel Glieder fehlen, weil die Veränderungen unvollständig sind. Weil aber dx so klein angenommen werden kann, als man will, so werden auch die fehlenden Glieder worinn dx^2, dx^3, u. s. f. vorkommen, so klein als man will, so daß sie die Ungleichheit nicht aufheben können. Folglich haben alle Schlüsse ihre Richtigkeit, die aus dieser Ungleichheit gezogen werden.

§. 7.

Wenn ein gewisser Werth von x das Differenzial der Funkzion null machet, so läßt sich nicht allemal daraus schließen, daß derselbe Werth des x das Maximum oder Minimum der Funkzion gebe.

Wenn man den Werth des x allmählig vergrößert, so kann es geschehen, daß y eine Zeitlang immer weniger und

und weniger zunehme, oder beinahe sich selbst gleich bleibe, so daß dy sich immer mehr und mehr dem Nichts nähere. Folglich ist in diesem Falle dy beinahe $= 0$, oder 0 ist die Grenze von dy. Und weil die Differenzial-Gleichungen weiter nichts als Näherungen oder Grenzen ausdrucken, so wird auch in diesem Falle sein

$$dy = 0.$$

Jedoch kann gleich darauf y wieder anfangen, allmälig stärker zuzunehmen, anstatt nun abzunehmen. Eben so kann eine Funkzion eine Zeitlang immer weniger abnehmen, so daß sie beinahe sich selbst gleich bleibet, hernach aber anfangen, wiederum stärker abzunehmen.

In solchen Fällen wird also $dy = 0$ oder $\frac{dy}{dx} = 0$, obgleich kein wirkliches Maximum oder Minimum Statt findet. Hieraus siehet man, daß der vorige Lehrsatz nicht allemal umgekehret werden kann, und daß das Verschwinden des Differenzials nicht ein untrügliches Kennzeichen eines äußersten Werthes ist.

§. 8.

Es sey eine Funkzion von x. Es sei X ein gewisser Werth des x, welcher dy oder das Differenzial des y zu Null machet. Es sei Y der Werth des y, der da entstehet, wenn X anstatt x in die Funkzion gesetzet wird. So wird Y gewiß ein Maximum sein, wenn jeder andere Werth des x, er mag größer oder kleiner sein als X, allemal die Funkzion y kleiner machet als Y. Und Y wird gewiß ein Minimum sein, wenn jeder andere Werth des x, er mag größer oder kleiner sein als X, das y größer machet als Y.

Dieses ist leicht einzusehen. Wenn Y das Maximum des y ist, so muß jeder andere Werth des y kleiner sein, als Y; ist aber Y ein Minimum, so muß jeder andere

Werth des y gröſſer sein. Weil nun y eine Funkzion von x ist, so entstehet das Maximum oder Minimum Y wenn x bis zu einem gewissen Werthe X zugenommen hat. Jeder andere Werth des x giebt also nicht das Maximum oder Minimum Y, sondern entweder allemal einen kleineren oder allemal einen gröſseren Werth der Funkzion als Y, nämlich einen kleineren, wenn Y ein Maximum ist, und einen gröſseren, wenn Y ein Minimum ist.

§. 9.

Aufgabe.

Das Maximum oder Minimum einer Funkzion von x finden.

Vorbereitung. Weil zugleich y ein Maximum und $dy = 0$ wird, so muß man erstlich y, das ist die gegebene Funkzion von x differenziren, und in der herauskommenden Differenzialgleichung Null anstatt dy oder $\frac{dy}{dx}$ setzen. Dieses wird einen gewissen Werth des x geben, den wir X nennen wollen, und dieses X wird in vielen Fällen auch zugleich das Maximum oder Minimum des y geben. Zum Beispiel, wenn

$$y = \sqrt{(2x - x^2)}$$

so ist $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x}{\sqrt{(2x - x^2)}}$

Man setze $\frac{dy}{dx} = 0$, so wird

$$0 = \frac{1 - x}{\sqrt{(2x - x^2)}}$$

$$0 = 1 - x$$

$$x = 1 \text{ oder } X = 1$$

Setzet

Seßet man nun dieſen Werth X oder x in die gegebene Funkzion $y = \sqrt{(2x - x^2)}$, ſo kommt

$$Y = 1$$

Dieſes Y oder 1 könnte alſo das Maximum oder Minimum des y ſein.

Wie wird man ſich aber verſichern, daß Y wirklich ein Maximum oder Minium iſt? Es iſt ſchon geſaget worden, daß, wenn Y ein Maximum oder Minimum iſt, jeder andere Werth des y entweder beſtändig größer oder beſtändig kleiner ſein muß, als Y (§. 8). Folglich muß in Rückſicht des Y, die Veränderung Δy immer bejahet, oder immer verneinet werden, es mag x entweder kleiner oder größer als X angenommen werden. Es iſt aber (§. 1.)

$$\Delta y = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\Delta x}{1} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \&c.$$

Weil aber im gegenwärtigen Falle $\frac{dy}{dx} = 0$, ſo wird

$$\Delta y = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \frac{d^4y}{dx^4} \cdot \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

Und wenn man annimmt, daß Δx klein genug iſt, um daß man die höheren Potenzen weglaſſen könne, ſo iſt

$$\Delta y = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2}$$

Man ſuche alſo $\frac{d^2y}{dx^2}$, welches einer Funkzion des x gleich ſein wird. Anſtatt des x ſeße man darin den gefundenen Werth X. Findet ihr nun, daß $\frac{d^2y}{dx^2}$ eine bejahete oder eine verneinte Größe iſt, ſo iſt auch

$$\Delta y \text{ oder } \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2}$$

entweder bejahet oder verneinet, denn der Faktor $\frac{\Delta x^2}{1.2}$ kann das Zeichen nicht ändern, weil das Quadrat von $\pm \Delta x$ allemal ist $+ \Delta x^2$. Folglich, wenn $\frac{d^2x}{dx^2}$ eine verneinte Größe ist, so ist Δy allemal verneint, und Y ist ein Maximum. Wenn hingegen $\frac{d^2y}{dx^2}$ bejahet ist, so ist Δy allemal bejahet, und Y ist ein Minimum.

Wenn $\frac{d^2y}{dx^2}$, und folglich $\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2}$ null wird, so hat man noch

$$\Delta y = \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \frac{d^4y}{dx^4} \cdot \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

oder wenn Δx sehr klein ist

$$\Delta y = \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{1.2.3}$$

Hier mag nun $\frac{d^3y}{dx^3}$ entweder bejahet oder verneinet werden, so bekommt Δy allemal zwei Werthe, nämlich einen bejaheten und einen verneinten, und dieses wegen des Faktors Δx^3, welcher bejahet oder verneinet ist, nachdem man Δx als bejahet oder verneinet annimmt. Folglich kann in diesem Falle kein Maximum oder Minimum Statt finden.

Wird aber $\frac{d^3y}{dx^3}$ und folglich $\frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{1.2.3}$ auch zu nichts, so kann man annehmen, wenn Δx sehr klein ist,

$$\Delta y = \frac{d^4y}{dx^4} \cdot \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4}$$

Bringet man hier die nämlichen Folgerungen an, wie bei dem Gliede $\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2}$, so wird man finden, daß Δy allemal

allemal bejahet oder allemal verneinet wird, man mag Δx entweder als bejahet oder als verneinet annehmen, weil in beiden Fällen Δx^4 eine bejahete Größe ist. Es findet also ein Maximum oder Minimum Statt, so bald nur $\frac{d^4y}{dx^4}$ einen wirklichen Werth hat und nicht null wird.

Hingegen, wenn dieses Glied auch null wird, so nehme man an

$$\Delta y = \frac{d^5y}{dx^5} \cdot \frac{\Delta x^5}{1.2.3.4.5}$$

Hier verändert sich das Zeichen des Δx^5, nachdem Δx bejahet oder verneinet ist, und Δy leidet die nämliche Veränderung des Zeichens. Also ist weder Maximum noch Minimum.

Ohne weiter zu gehen, wird man aus vorigen Bemerkungen folgende Regel ziehen können.

Auflösung. Man differenzire die gegebene Funkzion, und setze $\frac{dy}{dx} = 0$; so findet man einen Werth X des x, welcher das Maximum oder Minimum der Funkzion geben kann. Sollte aber diese erste Verrichtung für X einen unmöglichen oder unendlichen Werth geben, so braucht man nicht weiter zu gehen, und man siehet sogleich, daß kein Maximum oder Minimum Statt findet.

Gesetzt nun, ihr findet für X einen möglichen und endlichen Werth, so fahret fort und suchet die Glieder dieser Reihe

$$\Delta y = \frac{d^2y \ldots\ldots}{dx^2 \ldots\ldots} + \frac{d^3y \ldots\ldots}{dx^3 \ldots\ldots} + \frac{d^4y \ldots\ldots}{dx^4 \ldots\ldots} + \&c.$$

ohne euch um die fehlenden Potenzen von Δx und die dazu gehörigen Theiler in bestimmten Zahlen zu bekümmern.

Nachdem ihr jedes Glied ausgerechnet habet, so setzet darinn X anstatt x. Haltet ein bei dem ersten Gliede welches einen reellen oder wirklichen Werth, und nicht Null für Δy giebt. Hat dieses Glied einen unpaarigen Exponenten als dx^3, dx^5, &c. so seid ihr gewiß, daß die Funkzion weder Maximum noch Minimum hat. Ist aber der Exponent eine Paarzahl, als in dx^2, dx^4, dx^6 u. s. f. so findet ein Maximum oder ein Minimum Statt, nachdem Δy eine verneinte oder bejahete Größe wird.

Beispiel. Es sei

$$ay^2 = apx - px^2$$

oder $$y = \sqrt{\left(px - \frac{p}{a}x^2\right)}$$

so wird $$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}\left(px - \frac{p}{a}x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(p - \frac{2p}{a}x\right)$$

Wird nun $\frac{dy}{dx} = 0$, so hat man

$$0 = \tfrac{1}{2}\left(px - \frac{p}{a}x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(p - \frac{2p}{a}x\right) = \frac{p - \frac{2p}{a}x}{2\sqrt{\left(px - \frac{p}{a}x^2\right)}}$$

oder, wenn man beiderseits mit $2\sqrt{\left(px - \frac{p}{a}x^2\right)}$ multiplizirt

$$0 = p - \frac{2p}{a}x$$

daraus ziehet man

$$x = \tfrac{1}{2}a \text{ oder } X = \tfrac{1}{2}a.$$

Setzet

Seßet man diesen Werth von X in die gegebene Gleichung, so findet man

$$Y = \tfrac{1}{2}\sqrt{ap}$$

Um nun zu entdecken, ob dieser Werth von Y in der That ein Maximum oder Minimum ist, so muß man suchen $\frac{d^2y}{dx^2}$, indem man dx als beständig behandelt, und man findet für den Fall wo $x = \frac{1}{2}a$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2p}{a\sqrt{ap}}$$

Da nun $\frac{d^2y}{dx^2}$ eine wirkliche Größe ist, so braucht man nicht weiter zu differenziren. Und weil hier der Exponent in dx eine Paarzahl ist, so findet ein Maximum oder Minimum Statt. Endlich da $\frac{d^2y}{dx^2}$ eine negative Größe wird, so ist der äusserste Werth der Funkzion ein Maximum und nicht ein Minimum. Dieses Maximum ist also der Werth den man für Y gefunden hat, nämlich $Y = \frac{1}{2}\sqrt{ap}$, und er entstehet, wenn x oder $X \frac{1}{2}a$.

Achtzehntes Hauptstück.

Von der Anwendung der Differenzial-Rechnung auf Exponenzial-Größen und Logarithmen.

§. 1.

Eine Exponenzial-Größe ist diejenige, welche einen veränderlichen Exponenten hat, als a^x. Wenn nun $a^x = y$, so siehet man, daß a als die Grundzahl eines Logarithmen-Systems betrachtet werden kann, x stellet alle mögliche Logarithmen des Systems vor, und y die dazu gehörigen Potenzen.

Anmerkung. Die Potenzen in einem Logarithmen-Systeme werden auch oft **Proporzional-Zahlen** genannt. Die Ursach davon ist, daß sie in geometrischer Fortschreitung gehen, wenn die Logarithmen selbst in arithmetischer Fortschreitung zunehmen. Z. B. Es werde nach und nach

$x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \&c.$

so wird $a^x = 1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, \&c.$

Ferner nennet man dieselbigen Potenzen auch **absolute Zahlen**, und der kürze halben bloß **Zahlen**.

§. 2.

Gesetzet in der Funkzion a^x, nehme x zu um Δx, so entstehet $a^{x+\Delta x}$, oder da die Addizion der Exponenten der Multiplikazion der Potenzen entspricht, $a^x a^{\Delta x}$. Laßt uns setzen $a = 1 + b$, so ist $a^{\Delta x} = (1+b)^{\Delta x}$, und nach der

der Regel zur Entwickelung der Potenzen zweitheiliger Größen ist

$$(1+b)^{\Delta x} = 1+\Delta x b+\frac{\Delta x(\Delta x-1)}{1.\ 2}b^2+\frac{\Delta x(\Delta x-1)(\Delta x-2)}{1.\ 2.\ 3}b^3+\&c.$$

Wenn man die Koeffizienten $\frac{\Delta x(\Delta x-1)}{1.\ 2}$, $\frac{\Delta x(\Delta x-1(\Delta x-2)}{1.\ 2.\ 3}$, u. s. f. durch die Multiplikazion entwickelt, und alles nach den Potenzen von Δx ordnet, so ist

$$(1+b)^{\Delta x} = 1+b\Delta x$$
$$-\frac{b^2}{2}\Delta x+\frac{b^2}{2}\Delta x^2$$
$$+\frac{b^3}{3}\Delta x-\frac{b^3}{2}\Delta x^2+\frac{b^3}{6}\Delta x^3$$
$$-\&c.$$

oder

$$a^{\Delta x} = (1+b)^{\Delta x} = 1$$
$$+\left(b-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}-\&c.\right)\Delta x$$
$$+\left(\frac{b^2}{2}-\frac{b^3}{2}+\&c.\right)\Delta x^2$$
$$+\left(\frac{b^3}{6}-\&c.\right)\Delta x^3$$
$$+\&c.$$

Folglich

$$a^x a^{\Delta x} = a^{x+\Delta x} = a^x$$
$$+\left(b-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}-\&c.\right)a^x\Delta x$$
$$+\left(\frac{b^2}{2}-\frac{b^3}{2}+\&c.\right)a^x\Delta x^2$$
$$+\left(\frac{b^3}{6}-\&c.\right)a^x\Delta x^3$$
$$+\&c.$$

Folg-

Folglich

$$a^{x+\Delta x} - a^x = \left(b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \&c.\right) a^x \Delta x$$
$$+ \left(\frac{b^2}{2} - \frac{b^3}{3} + \&c\right) a^x \Delta x^2$$
$$+ \left(\frac{b^3}{6} - \&c.\right) a^x \Delta x^3$$
$$+ \&c.$$

Diese Gleichung zeiget an um wie viel die Potenz a^x zunimmt, wenn x um Δx zunimmt.

Je kleiner Δx wird, desto mehr nähert sich die letztgefundene Gleichung der folgenden, wo wir statt der vollständigen Veränderungen die unvollständigen setzen.

$$a^{x+dx} - a^x = \left(b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \&c.\right) a^x dx$$

$$\text{oder } d(a^x) = \left(b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \&c.\right) a^x dx.$$

Nichts kann uns hindern die beständige Größe $b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \&c.$ durch A anzudeuten, also ist

$$d(a^x) = A a^x dx$$

das heißt, das Differenzial einer Exponenzial-Größe ist das Produkt aus der Exponenzial-Größe selbst, dem Differenziale des Exponenten und einer beständigen Größe. Diese beständige Größe beträgt

$$b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \&c.$$

oder, weil angenommen worden $a = 1 + b$, also $b = a - 1$,

$$A = (a-1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \text{&c.}$$

§. 3.

Man hat es bequemer gefunden statt dieses Faktors A einen Theiler m anzunehmen, so daß $m = \frac{1}{A}$ und $A = \frac{1}{m}$. Also ist

$$\delta(a^x) = \frac{a^x \delta x}{m}$$

oder, wenn die Proporzionalzahl a^x durch y ausgedrucket wird, ist

$$\delta y = \frac{y \delta x}{m}$$

§. 4.

Die Größe m, wovon eben jetzt gesprochen worden, ist in jedem Systeme beständig, aber in verschiedenen Systemen hat sie verschiedene Werthe, weil diese Werthe von der Grundzahl a abhängen. Einige nennen sie den Modulus des Systemes, andere bloß die beständige Größe des Systemes, noch andere, aus geometrischen Gründen, die Subtangente des Systemes.

§. 5.

In zwei verschiedenen Systemen verhalten sich die Logarithmen der nämlichen Proporzional-Zahl, wie die Subtangenten der Systeme.

Es sei in einem Systeme x der Logarithmus von y und $x+\partial x$ der Logarithmus von $y+\partial y$. Es sei in einem andern Systeme z der Logarithmus der nämlichen Zahl y, und $z+\partial z$ der Logarithmus von $y+\partial y$. Es ist am gehörigen Ort bewiesen worden, daß die Logarithmen der nämlichen Zahlen in zwei verschiedenen Systemen ein beständiges Verhältniß unter sich haben. (VI. H. §. 24). Folglich wird sein

$$x : z = (x+\partial x) : (z+\partial z)$$

oder $(x+\partial x) : x = (z+\partial z) : z$

daher ist $\partial x : (x+\partial x) = \partial z : (z+\partial z)$. (H. IX. §. 16.)

oder $\partial x : \partial z = (x+\partial x) : (z+\partial z)$

Es sei nun im ersten Systeme

$$\partial y = \frac{y\partial x}{m}$$

Aus demselbigen Grunde ist im andern Systeme

$$\partial y = \frac{y\partial z}{n}$$

wo n die Subtangente dieses andern Systems ist. Also folget

$$\frac{y\partial x}{m} = \frac{y\partial z}{n}$$

$$\text{also } \frac{\partial x}{m} = \frac{\partial z}{n}$$

$$\text{oder } \partial x : \partial z = m : n$$

Da nun gefunden worden

$$\partial x : \partial z = (x+\partial x) : (z+\partial z)$$

so ist $(x+\partial x) : (z+\partial z) = m : n$

Nun ist ferner

$$(x+\delta x):(z+\delta z)=x:z$$

also $x:z=m:n$

welches zu beweisen war.

§. 6.

Aufgabe.

Es seien die Subtangenten zweier Systeme, und der Logarithmus einer Zahl in dem einem Systeme gegeben: man soll den Logarithmus der nämlichen Zahl in dem andern Systeme finden.

Auflösung. Wie sich die Subtangente des ersten Systemes zur Subtangente des anderen Systemes verhält, so verhält sich der Logarithmus in dem ersten Systeme, zum Logarithmus der nämlichen Zahl in dem zweiten Systeme.

Anmerkung. Es seien die beiden Subtangenten μ und μ', die beiden Logarithmen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$, so ist

$$\mu:\mu'=\mathfrak{L}:\mathfrak{L}'\left(=\frac{\mu'}{\mu}\mathfrak{L}\right)$$

Man darf also nur jeden Logarithmus $\mathfrak{L}$ des ersten Systemes mit $\frac{\mu'}{\mu}$ multipliziren, um die Logarithmen der nämlichen Zahlen im anderen Systeme zu bekommen.

§. 7.

Um die Berechnung der Logarithmen zu erleichtern, pflegt man ein System anzunehmen, dessen Subtangente 1 ist, und die dazu gehörigen Logarithmen heißen natürliche Logarithmen, weil 1 als die einfacheste Zahl angesehen wird. Man nennet sie auch hyperbolische Logarithmen, aus geometrischen Gründen. Setzet man nun voraus, daß die hyperbolischen Logarithmen bekannt und

berech-

berechnet sind, so kann man leicht jedes andere System berechnen. Denn es ist, vermöge des vorigen Paragraphs,

$$\mathfrak{L}' = \frac{\mu'}{\mu}\mathfrak{L}$$

ist nun $\mathfrak{L}$ der natürliche Logarithmus einer Zahl, so ist $\mu = 1$, und es wird

$$\mathfrak{L}' = \mu'\mathfrak{L}$$

woraus man siehet, daß man nur die natürlichen Logarithmen durch die Subtangente μ' irgend eines Systemes zu multipliziren brauchet, um die Logarithmen dieses Systemes zu bekommen.

Die Grundzahl des natürlichen Logarithmen-Systemes wird oft durch den Buchstaben e ausgedrucket, so daß e^x alle mögliche Proporzional-Zahlen in dem natürlichen Systeme vorstellet. Es wird bald gezeiget werden, wie viel dieses e eigentlich beträgt.

Da wir in diesem Hauptstücke noch viel von Logarithmen zu sprechen haben, so wollen wir, der Kürze halben, den natürlichen Logarithmus einer Zahl allemal durch l, und jeden anderen Logarithmus durch $\mathfrak{L}$ ausdrucken. Es soll also ly allemal den natürlichen Logarithmus von y bedeuten, und $\mathfrak{L}y$, den Logarithmus von y in einem anderen Systeme.

§. 8.

Aufgabe.

Exponenzialgrößen und Logarithmen differenziren.

Auflösung.

Wenn $y = a^x$

so ist $dy = \frac{y\,dx}{\mu} = \frac{a^x\,dx}{\mu}$

Wenn

$$\text{Wenn } x = \mathfrak{L}y$$
$$\text{so ist } dx = \frac{\mu dy}{y}$$

Die erste dieser Formeln ist schon oben bewiesen worden (§. 2 und 3), und die zweite wird ohne Schwierigkeit daraus gefolgert. Der Buchstabe μ bedeutet die Subtangente des Systemes. Wenn von dem natürlichen Systeme die Rede ist, so wird die Basis $a = e$, und die Subtangente $\mu = 1$. Also

$$\text{Wenn } y = e^x$$
$$\text{so ist } dy = ydx = e^x dx$$
$$\text{Wenn } x = \mathfrak{l}y$$
$$\text{so ist } dx = \frac{dy}{y}$$

und diese lezten Formeln, die sich auf das natürliche Logarithmen System beziehen, sind die gebräuchlichsten. Anstatt x und y kann jede Funkzion veränderlicher Größen gesetzet werden. Die Formeln müssen allemal gelten. Zum Beispiel.

$$\text{Es sei } y = e^{nx-x^2}$$
$$\text{so ist } dy = e^{nx-x^2}\, d(nx-x^2)$$
$$= e^{nx-x^2}\,(n-2x)dx$$
$$\text{Es sei } y = \mathfrak{l}[x+\sqrt{(a^2+x^2)}]$$
$$\text{so ist } dy = \frac{d[x+\sqrt{(a^2+x^2)}]}{x+\sqrt{(a^2+x^2)}}$$

oder wenn man diesen Ausdruck gehörig entwickelt

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$$

Zusaz. Die angegebenen Formeln können folgendermaßen in Worten ausgedrucket werden.

1) Das Differenzial einer Proporzional-Zahl im natürlichen Systeme ist gleich dem Produkte aus der Zahl selbst und dem Differenziale ihres Logarithmus.

2) Das Differenzial des Logarithmus im natürlichen Systeme ist gleich dem Differenziale der Proporzional-Zahl, wenn es durch die Proporzional-Zahl selbst getheilet wird.

§. 9.

Aufgabe.

Den natürlichen Logarithmus von $1+x$ finden.

Vorbereitung. Es sei

$$y = l(1+z)$$

so bekommt man, wenn z um Δz zunimmt, und y zu Y wird, (XVII. Hauptst. §. 2).

$$Y = y + \frac{dy}{dz}\cdot\frac{\Delta z}{1} + \frac{d^2z}{dz^2}\cdot\frac{\Delta z^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dz^3}\cdot\frac{\Delta z^3}{1.2.3} + \frac{d^4y}{dz^4}\cdot\frac{\Delta z^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

Wenn man nach und nach differenziret, und dx als beständig betrachtet, so findet man folgende Werthe:

$$y = l(1+z)$$
$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{1+z}$$
$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{-1}{(1+z)^2}$$
$$\frac{d^3y}{dz^3} = \frac{2}{(1+z)^3}$$
$$\frac{d^4y}{dz^4} = \frac{-6}{(1+z)^4} \text{ \&c. \&c.}$$

Setzet

Setzet man diese Werthe in die obige Reihe, und auch anstatt Y und y ihre Werthe, so ist

$$l(1+z+\Delta z) = l(1+z) + \frac{1}{1+z}\cdot\frac{\Delta z}{1} - \frac{1}{(1+z)^2}\cdot\frac{\Delta z^2}{1.2} + \frac{1.2}{(1+z)^3}\cdot\frac{\Delta z^3}{1.2.3} - \frac{1.2.3}{(1+z)^4}\cdot\frac{\Delta z^4}{1.2.3.4}$$
$$\&c. \qquad \&c.$$

Wir wollen nun annehmen, es werde $z = 0$, so bekommt man

$$l(1+\Delta z) = l1 + \frac{\Delta z}{1} - \frac{\Delta z^2}{2} + \frac{\Delta z^3}{3} - \frac{\Delta z^4}{4} + \&c.$$

aber in jedem Systeme und folglich auch im natürlichen ist $l1 = 0$; denn $e^0 = 1$, folglich $l1 = 0$. Also

$$l(1+\Delta z) = \Delta z - \frac{\Delta z^2}{2} + \frac{\Delta z^3}{3} - \frac{\Delta z^4}{4} + \&c.$$

Es kann aber Δz jede Größe vorstellen, und nichts hindert, daß wir x anstatt Δz schreiben. Wenn dieses geschiehet, so bekommen wir folgende Formel.

Auflösung. Es ist

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \&c.$$

Zusatz I. Wenn man annimmt $1+x=q$, so wird $x=q-1$, und

$$lq=(q-1)-\frac{(q-1)^2}{2}+\frac{(q-1)^3}{3}-\frac{(q-1)^4}{4}+\&c.$$

Zusatz II. Wenn man in der gefundenen Formel, welche $l(1+x)$ ausdrucket, x verneinet annimmt, und allenthalben $-x$ anstatt $+x$ setzet, so kommt

$$l(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}-\&c.$$

Man subtrahire $l(1-x)$ von $l(1+x)$, nämlich

Von $l(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\&c.$

subtr. $l(1+x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-\&c.$

bleib. $l(1+x)-l(1-x)=2x\ldots+\frac{2x^3}{3}\ldots+\frac{2x^5}{5}\ldots\&c.$

Es ist aber $l(1+x)-l(1-x)=l\frac{1+x}{1-x}$, also wird

$$l\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\&c.\right)$$

Es werde nun der natürliche Logarithmus einer Zahl n verlanget, so nehme man an

$$n=\frac{1+x}{1-x}$$

daher $n-nx=1+x$

$n-1=nx+x$

$n-1=(n+1)x$

$$\frac{n-1}{n+1}=x$$

Man

Man ſetze alſo in die letzte Formel n anſtatt $\frac{1+x}{1-x}$, und $\frac{n-1}{n+1}$ anſtatt x, ſo kommt

$$\mathfrak{l}n = 1\left[\frac{n-1}{n+1} + \frac{(n-1)^3}{3(n+1)^3} + \frac{(n-1)^5}{5(n+1)^5} + \frac{(n-1)^7}{7(n+1)^7} + \&c.\right]$$

Weil dieſe Reihe ſehr geſchwinde abnimmt, ſo iſt ſie in der Ausübung ſehr bequem. Geſetzt, es ſoll der natürliche Logarithmus von 10 gefunden werden, ſo iſt

$$\mathfrak{l}10 = 2\left(\frac{9}{11} + \frac{9^3}{3.11^3} + \frac{9^5}{5.11^5} + \frac{9^7}{7.11^7} + \&c.\right)$$

Wenn man alle Glieder in Dezimalbrüchen ausdrucket, ſo findet man

$$\mathfrak{l}10 = 2{,}3025850\ldots\ldots$$

§. 10.

Aufgabe.

Den Logarithmus einer Zahl in jedem Syſteme finden.

Auflöſung. Wie 1, als die Subtangente des natürlichen Syſtemes, ſich verhält zur Subtangente m eines anderen Syſtemes; ſo verhält ſich der natürliche Logarithmus einer Zahl zu ihrem Logarithmus im anderen Syſteme (§. 6), alſo

$$1 : m = \mathfrak{l}n : \mathfrak{L}n$$

oder $\mathfrak{L}n = m\mathfrak{l}n$

und $\frac{\mathfrak{L}n}{\mathfrak{l}n} = m$

Wenn man alſo den Logarithmus irgend einer Zahl n im natürlichen Syſteme, und auch im anderen Syſteme kennet, ſo findet man die Subtangente m. Es iſt am bequem-

quemsten, wenn man anstatt n die Grundzahl des andern Systemes nimmt, alsdenn ist $\mathfrak{L}n$ allemal $= 1$. Denn weil $n^1 = n$, so ist $\mathfrak{L}n = 1$. Folglich bekommt man

$$\frac{1}{\mathfrak{l}n} = m$$

Hier läßt sich $\mathfrak{l}n$ aus voriger Aufgabe finden. Hat man nun die Subtangente m des anderen Systemes gefunden, so darf man nur die natürlichen Logarithmen mit m multipliziren, um die Logarithmen der nämlichen Zahlen im anderen Systeme zu bekommen. Denn $\mathfrak{L}n = m\mathfrak{l}n$.

Beispiel. In den gewöhnlichen Logarithmen-Tafeln ist die Grundzahl 10, und folglich $\mathfrak{L}10 = 1$. Der natürliche Logarithmus von 10 ist gefunden worden 2'3025850.... Setzet man diese Werthe in die Formel

$$m = \frac{\mathfrak{L}n}{\mathfrak{l}n}$$

so wird $m = \dfrac{1}{2'3025850...}$

oder $m = 0'4342944....$

Dieses ist also der Modulus oder die Subtangente des Systemes der Tafel-Logarithmen; und mit diesem Modulus muß jeder natürliche Logarithmus multipliziret werden, wenn man den Tafel Logarithmus derselbigen Zahl erhalten will.

Es sei verlanget der Tafel-Logarithmus der Zahl 17, so ist

$$\mathfrak{l}17 = 2\left(\frac{16}{18} + \frac{16^3}{3.18^3} + \frac{16^5}{5.18^5} + \frac{16^7}{7.18^7} + \&c.\right)$$

oder, weil $\frac{16}{18} = \frac{8}{9}$, und $\frac{16^n}{18^n} = \left(\frac{16}{18}\right)^n = \left(\frac{8}{9}\right)^n = \frac{8^n}{9^n}$

so ist $\mathfrak{l}17 = 2.\left(\frac{8}{9} + \frac{8^3}{3.9^3} + \frac{8^5}{5.9^5} + \frac{8^7}{7.9^7} + \&c.\right)$

Mul-

Multipliziret man nun die Reihe mit dem Modulus 0'4342944...., so erhält man

$$\mathfrak{L}17 = 2 \times 0'4342944\ldots\left(\frac{8}{9} + \frac{8^3}{3.9^3} + \frac{9^5}{5.9^5} + \&c.\right)$$

oder

$$\mathfrak{L}17 = 0'8685888\ldots\left(\frac{8}{9} + \frac{8^3}{3.9^3} + \frac{8^5}{5.9^5} + \&c.\right)$$

Entwickelt man nun alles in Dezimalbrüchen, so wird

$$\mathfrak{L}17 = 1'2304489\ldots.$$

§. 11.

Aufgabe.

In jedem Systeme die Proporzionalzahl finden, die zu einem Logarithmus gehöret.

Vorbereitung. Es sei m der Modulus eines Systemes, und in diesem Systeme sei

$$u = \mathfrak{L}(1+z)$$

so ist vermöge der vorigen Paragraphen

$$u \text{ oder } \mathfrak{L}(1+z) = m\left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \&c.\right)$$

folglich $$\frac{u}{m} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \&c.$$

Man nehme nun an es sei

$$z = Au + Bu^2 + Cu^3 + Du^4 + Eu^5 + \&c.$$

und verwandele z in eine Funkzion von u, wie am gehörigen Orte (XIII. Hauptst. §. 27) gelehret worden. So wird man bekommen

$$z = \frac{u}{m} + \frac{u^2}{2m^2} + \frac{u^3}{6m^3} + \frac{u^4}{24m^4} + \frac{u^5}{120m^5} + \&c.$$

oder:

$$z=\frac{u}{1.m}+\frac{u^2}{1.2.m^2}+\frac{u^3}{1.2.3.m^3}+\frac{u^4}{1.2.3.4.m^4}+\frac{u^5}{1.2.3.4.5.m^5}+\&c.$$

folgl. $z+1=1+\frac{u}{m}+\frac{u^2}{1.2.m^2}+\frac{u^3}{1.2.3.m^3}+\frac{u^4}{1.2.3.4.m^4}+\&c.$

Weil nun $u=\mathfrak{L}(1+z)$, so ist $1+z$ die Zahl, deren Logarithmus u ist.

Auflösung. Laßt uns die Proporzionalzahl, die zum Logarithmus u gehöret, durch $\mathfrak{N}u$ ausdrucken, so wird

$$\mathfrak{N}u=1+\frac{u}{1.m}+\frac{u^2}{1.2.m^2}+\frac{u^3}{1.2.3.m^3}+\frac{u^4}{1.2.3.4.m^4}+\&c.$$

Im natürlichen Systeme ist $m=1$. Wenn wir also die Zahl, deren natürlicher Logarithmus u ist, durch nu ausdrucken, so wird

$$nu=1+u+\frac{u^2}{1.2}+\frac{u^3}{1.2.3}+\frac{u^4}{1.2.3.4}+\&c.$$

Zusatz I. Weil die Glieder in der gefundenen Reihe zunehmend sind, so scheinet die Reihe von geringem Nutzen zu sein. Jedoch dienet sie, um die Grundzahl des natürlichen Systemes zu finden. Denn in jedem Systeme ist die Grundzahl diejenige Proporzionalzahl, deren Logarithmus 1 ist. Setzet man also 1 anstatt u in der letzten Formel, so wird

$$n1=1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{1.2.3.4.5}+\&c.$$

Berechnet man diese Reihe in Dezimalbrüchen, so entstehet

$$e=2'7182818.....$$

und dieses ist die Grundzahl der natürlichen Logarithmen, welcher wir schon mehr als einmal erwähnet haben.

Zusatz II. Die nämliche Reihe, welche in der Auflösung angegeben worden, kann auch dienen, um Exponenzialgrößen durch unendliche Reihen auszudrucken.

Es

Es sei gegeben e^x, so ist dieses die Zahl, welche im natürlichen Systeme zum Logarithmus x gehöret, oder $e^x = nx$, es ist aber, vermöge der gefundenen Formel,

$$nx = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{&c.}$$

also $e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{&c.}$

Gesetzt, es soll a^x durch eine unendliche Reihe ausgedrucket werden, so setze man

$$a^x = e^z$$

so wird, wenn man beide Glieder auf ein System beziehet

$$z\mathfrak{L}a = x\mathfrak{L}e$$

und wenn man das natürliche System nimmt, so ist $\mathfrak{L}e$ oder $le = 1$, folglich

$$zla = x$$

folglich wird $a^x = e^{zla}$. Es ist aber

$$e^{zla} = 1 + \frac{zla}{1} + \frac{z^2(la)^2}{1.2} + \frac{z^3(la)^3}{1.2.3} + \text{&c.}$$

also auch

$$a^x = 1 + zla + \frac{z^2(la)^2}{1.2} + \frac{z^3(la)^3}{1.2.3} + \frac{z^4(la)^4}{1.2.3.4} + \text{&c.}$$

wo unter la allemal der natürliche Logarithmus des a verstanden wird.

§. 12.

Aufgabe.

Wenn der Logarithmus um eine gewisse Quantität zunimmt, so soll gefunden werden, um wieviel die Proporzionalzahl zunehmen muß.

Vorbereitung. Es sei a die Grundzahl des Systemes, so ist a^x die zu x gehörige Proporzionalzahl, und

$a^{x+\Delta x}$ ist die Proporzionalzahl, welche zum Logarithmus $x+\Delta x$ gehöret. Es soll nun gefunden werden

$$a^{x+\Delta x}-a^x$$

oder $a^x a^{\Delta x}-a^x$

oder $a^x(a^{\Delta x}-1)$

Es ist aber, vermöge des vorigen Paragraphs,

$$a^{\Delta x}=1+\Delta x la+\frac{\Delta x^2(la)^2}{1.\ 2}+\frac{\Delta x^3(la)^3}{1.\ 2.\ 3}+\frac{\Delta x^4(la)^4}{1.2.3.4}+\&c.$$

folglich

$$a^{\Delta x}-1=\Delta x la+\frac{\Delta x^2(la)^2}{1.\ 2}+\frac{\Delta x^3(la)^3}{1.\ 2.\ 3}+\frac{\Delta x^4(la)^4}{1.2.3.4}+\&c.$$

$$\text{folgl. } a^x(a^{\Delta x}-1)=a^x\left(\Delta x la+\frac{\Delta x^2(la)^2}{1.\ 2}+\frac{\Delta x^3(la)^3}{1.\ 2.\ 3}+\&c.\right)$$

Auflösung. Es sei $y=a^x$ und $\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x$ das ist, y sei die Proporzionalzahl, die zum Logarithmus x gehöret, in einem Systeme dessen Grundzahl a ist, so wird

$$\Delta y=y\Delta x la+\left(\frac{\Delta x^2(la)^2}{1.\ 2}+\frac{\Delta x^3(la)^3}{1.\ 2.\ 3}+\&c.\right)$$

wo unter la der natürliche Logarithmus von a verstanden wird. Wird Δx verneinet angenommen, so ist

$$\Delta y=y\left(-\Delta x la+\frac{\Delta x^2(la)^2}{1.\ 2}-\frac{\Delta x^3(la)^3}{1.\ 2.\ 3}+\&c.\right)$$

folglich ist überhaupt

$$\Delta y=y\left(\pm\Delta x la+\frac{\Delta x^2(la)^2}{1.\ 2}\pm\frac{\Delta x^3(la)^3}{1.\ 2.\ 3}+\&c.\right)$$

Im natürlichen Systeme wird die Grundzahl $a=e$, und $la=le=1$. Also ist in diesem Systeme

$$\Delta y=y\left(\pm\Delta x+\frac{\Delta x^2}{1.2}\pm\frac{\Delta x^3}{1.2.3}+\frac{\Delta x^4}{1.2.3.4}\pm\&c.\right)$$

§. 13.

§. 13.

Aufgabe.

Wenn die Proporzional-Zahl um ein Gewisses zunimmt, so soll man finden, um wie viel der Logarithmus zunehmen muß.

Auflösung. Es sei $z = \mathfrak{L}x$. Man soll finden Δz oder $\mathfrak{L}(x+\Delta x) - \mathfrak{L}x$. Hier ist

$$\Delta z = \mathfrak{L}(x+\Delta x) - \mathfrak{L}x = \mathfrak{L}\frac{x+\Delta x}{x} = \mathfrak{L}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

Es ist aber (§. 9 und 10)

$$\Delta z \text{ oder } \mathfrak{L}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) = m\left(\frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta x^2}{2x^2} + \frac{\Delta x^3}{3x^3} - \frac{\Delta x^4}{4x^4} + \&c.\right)$$

wo m den Modulus oder die Subtangente des Systemes vorstellet. Weil Δx bejahet und verneinet sein kann, so hat man überhaupt

$$\Delta z \text{ oder } \Delta(\mathfrak{L}x) = m\left(\pm\frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta x^2}{2x^2} \pm \frac{\Delta x^3}{3x^3} - \frac{\Delta x^4}{4x^4} \pm \&c.\right)$$

Im natürlichen Systeme wird $m = 1$, folglich

$$\Delta(lx) = \pm\frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta x^2}{2x^2} \pm \frac{\Delta x^3}{3x^3} - \frac{\Delta x^4}{4x^4} \pm \&c.$$

Neun-

Neunzehntes Hauptstück.

Von der Anwendung der Differenzial-Rechnung auf Kreisgrößen.

§. 1.

Es giebt in der Algebra verschiedene Größen, die ihre Namen aus der Meßkunst erhalten haben, weil diese Wissenschaft zu deren Untersuchung die erste Gelegenheit gegeben hat. Jedoch können solche Größen sehr wohl ohne Hülfe der Meßkunst erkläret werden. Dergleichen sind die Quadratzahlen, Kubikzahlen, Polygonalzahlen, und die hyperbolischen Logarithmen. Alle diese Zahlen kann man berechnen, ohne zu wissen, was ein Quadrat, ein Kubus, ein Polygon, eine Hyperbel in der Meßkunst zu bedeuten haben.

Es kann uns also nichts hindern, die Kreisgrößen welche eigentlich zur Dreieckslehre gehören, hier bloß als algebraische Quantitäten zu betrachten, und den Leser so viel damit bekannt zu machen, als es zur Erläuterung des folgenden nöthig sein wird.

§. 2.

Unter den unendlichen Reihen, die in algebraischen Rechnungen gebräuchlich sind, giebt es einige, die sehr häufig vorkommen. Und da es unbequem sein würde, allemal den Anfang derselben auszuschreiben, so sind die Mathematiker eins geworden, dergleichen Reihen durch gewisse besondere Namen kürzer auszudrucken. Wir wollen vorzüglich folgende zwei Reihen bemerken.

$$\text{I)}\ \mathfrak{S}x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \&c.$$

$$\text{II)}\ \mathfrak{S}'x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \&c.$$

Die erste heißt der Sinus von x, welches wir der Kürze halben durch $\mathfrak{S}x$ angedeutet haben. Die zweite wird genannt der Kosinus von x, welches wir, wie hier geschehen, durch $\mathfrak{S}'x$ ausdrucken wollen. Wenn also in der Folge diese Wörter oder Zeichen vorkommen, so gedenke man sich allemal an deren Stelle die angeführten Reihen.

Man merke noch, daß die zweite Reihe aus der ersten entstehet, wenn man das Quadrat der ersten von 1 subtrahiret, und aus dem Reste die Quadratwurzel ausziehet. Es ist also allemal

$$\mathfrak{S}'x = \sqrt{[1 - (\mathfrak{S}x)^2]}$$

Um sich dessen zu versichern, setze man

$$\sqrt{[1 - (\mathfrak{S}x)^2]} = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + \&c.$$

Man quadrire beiderseits, man setze im ersten Gliede anstatt $(\mathfrak{S}x)^2$ das Quadrat der Reihe, welche durch $\mathfrak{S}x$ ausgedrucket wird. Man vergleiche die Koefficienten, so wird sich ihr Werth so bestimmen, wie es in der Reihe $\mathfrak{S}'x$ geschehen ist.

Anmerkung. Wenn in der Folge Quadrate oder andere Potenzen von solchen abgekürzten Ausdrücken vorkommen werden, so wollen wir die Haken weglaßen. Es wird also $\mathfrak{S}x^n$, $\mathfrak{S}'x^n$ so viel bedeuten, als $(\mathfrak{S}x)^n$, $(\mathfrak{S}'x)^n$. Man schreibet auch $\mathfrak{S}^n x$, $\mathfrak{S}'^n x$ statt $(\mathfrak{S}x)^n$, $(\mathfrak{S}'x)^n$.

§. 3.

Aus beiden vorhergehenden Reihen entstehen wiederum andere, nämlich

III) Die

III. Die Tangente von x, oder

$$\mathfrak{T}x = \frac{\mathfrak{S}x}{\mathfrak{S}'x} = \frac{x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \&c.}{1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \&c.}$$

IV) Die Kotangente von x, oder

$$\mathfrak{T}'x = \frac{\mathfrak{S}'x}{\mathfrak{S}x} = \frac{1}{\mathfrak{T}x} = \frac{1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \&c.}{x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \&c.}$$

V) Die Sekante von x, nämlich

$$\mathfrak{Z}x = \frac{1}{\mathfrak{S}'x} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \&c.}$$

IV) Die Kosekante von x, das ist

$$\mathfrak{Z}'x = \frac{1}{\mathfrak{S}x} = \frac{1}{x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \&c.}$$

VII) Der Sinus-Versus von x, nämlich

$$\mathfrak{V}x = 1 - \mathfrak{S}'x = x^2 - \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} - \&c.$$

VIII) Der Kosinus-Versus von x, das ist

$$\mathfrak{V}'x = 1 - \mathfrak{S}x = 1 - x + \frac{x^3}{1.2.3} - \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \&c.$$

Anmerkung. Weil die Zeichen willkürliche Dinge sind, so haben wir zur Bezeichnung der 8 angeführten Reihen

Reihen nur einzelne deutsche große Buchstaben, nebst einem Striche dabei, wo die Sylbe Ko vorkommt, gebrauchet. Sonst pfleget man die lateinischen Namen abgekürzet zu gebrauchen, als

Sin. x	Cosin. x
Tang. x	Cot. x
Sec. x	Cosec. x
Sin. vers. x	Cosin. vers. x

Diese Schreibart nimmt in Rechnungen etwas zu viel Raum ein. Wir wollen noch anmerken, daß von gedachten acht Reihen die vier ersten am häufigsten genutzet werden, nämlich der Sinus, der Kosinus, die Tangente und die Kotangente der veränderlichen Größe.

§. 4.

Die veränderliche Größe x wovon die acht angeführten Reihen Funkzionen sind, hat auch einen eigenen Namen; sie heißt aus geometrischen Ursachen der **Arkus** oder **Kreisbogen** derselben. Es sei

$$u = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \&c.$$

so ist u der Sinus von x. Hingegen ist x der Arkus des Sinus u, worunter man hier weiter nichts verstehen muß, als die veränderliche Größe, woraus die Reihe entstehet, deren Aggregat hier durch u angedeutet wird, und die wir den Sinus von x genannt haben. Wir wollen das Wort Arkus durch ein bloßes A andeuten. Also

Wenn $u = \mathfrak{S}x$, so ist $x = \mathfrak{AS}u$
Wenn $u = \mathfrak{S}'x$, so ist $x = \mathfrak{AS}'u$
Wenn $u = \mathfrak{T}x$, so ist $x = \mathfrak{AT}u$
Wenn $u = \mathfrak{T}'x$, so ist $x = \mathfrak{AT}'u$

&c. &c.

Anmer-

Anmerkung. Der Arkus, dessen Sinus, dessen Kosinus, Tangente, Kotangente, u. s. f. werden Kreisgrößen genannt, oder auch trigonometrische Größen.

§. 5.

Weil der Sinus eine Funkzion des Arkus ist, so ist auch der Arkus eine Funkzion des Sinus. Eben so ist der Arkus eine Funkziou des Kosinus, der Tangente, u. s. f. Es läßt sich also der Arkus durch eine unendliche Reihe ausdrucken, worin alle Glieder Funkzionen des Sinus, oder des Kosinus, u. s. f. sind. Daher entstehen wiederum neue Reihen, die auch in algebraischen Rechnungen gebrauchet werden.

I) Es sei

$$u = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \&c.$$

so ist $u = \mathfrak{S}x$. Man nehme an, es sei

$$x = Au + Bu^3 + Cu^5 + Du^7 + \&c.$$

Diese Reihe und ihre Potenzen setze man in die vorige Reihe anstatt x und dessen Potenzen, und vergleiche die Koeffizienten, so wird man finden

$$x \text{ oder } \mathfrak{AS}u = u + \frac{1.u^3}{2.3} + \frac{1.3.u^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5.u^7}{2.4.6.7} + \&c.$$

II) Es werde verlanget $\mathfrak{AS}'u$. Es sei $\mathfrak{AS}'u = x$, es ist also u der Kosinus des verlangeten Arkus x. Ist aber u der Kosinus, so wird der Sinus sein $\sqrt{(1-u^2)}$ oder $(1-u^2)^{\frac{1}{2}}$. Denn es ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}'x &= \sqrt{(1-\mathfrak{S}x^2)} \\ \text{daher } \mathfrak{S}'x^2 &= 1-\mathfrak{S}x^2 \\ \text{und } \mathfrak{S}x^2 &= 1-\mathfrak{S}'x^2 \\ \text{folglich } \mathfrak{S}x &= \sqrt{(1-\mathfrak{S}'x^2)} \\ \text{oder } \mathfrak{S}x &= \sqrt{(1-u^2)} \end{aligned}$$

zu

zu diesem Sinus ist der Arkus, vermöge voriger Formel

$$(1-u^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{1.(1-u^2)^{\frac{3}{2}}}{2.3}+\frac{1.3.(1-u^2)^{\frac{5}{2}}}{2.4.5}+\frac{1.3.5(1-u^2)^{\frac{7}{2}}}{2.4.6.7}+\&c.$$

Und also wird

$$\mathfrak{AS}'u=(1-u^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{1.(1-u^2)^{\frac{3}{2}}}{2.3}+\frac{1.3.(1-u^2)^{\frac{5}{2}}}{2.4.5}+\&c.$$

oder auch

$$\mathfrak{AS}'u=(1-u^2)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1.(1-u^2)}{2.3}+\frac{1.3.(1-u^2)^2}{2.4.5}+\frac{1.3.5.(1-u^2)^3}{2.4.6.7}+\&c.\right)$$

III) Es sei $\mathfrak{AT}u=x$, so ist

$$u=\mathfrak{T}x$$

$$u=\frac{\mathfrak{S}x}{\mathfrak{S}'x}$$

$$u=\frac{\mathfrak{S}x}{\sqrt{(1-\mathfrak{S}x^2)}}$$

$$u^2=\frac{\mathfrak{S}x^2}{1+\mathfrak{S}x^2}$$

$$u^2-u^2\mathfrak{S}x^2=\mathfrak{S}x^2.$$

$$u^2=\mathfrak{S}x^2+u^2\mathfrak{S}x^2$$

$$u^2=\mathfrak{S}x^2(1+u^2)$$

$$\frac{u^2}{1+u^2}=\mathfrak{S}x^2$$

$$\frac{u}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}}=\mathfrak{S}x$$

Der Arkus dieſes gefundenen Sinus iſt

$$\frac{u}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{1.u^3}{2.3(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1.3.u^5}{2.4.5(1+u^2)^{\frac{5}{2}}}+\&c.$$

Alſo iſt

$$\mathfrak{AT}u=\frac{u}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{1.u^3}{2.3.(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1.3.u^5}{2.4.5.(1+u^2)^{\frac{5}{2}}}+\&c.$$

oder

$$\mathfrak{AT}u=\frac{u}{\sqrt{(1+u^2)}}\cdot\left(1+\frac{1.u^2}{2.3.(1+u^2)}+\frac{1.3.u^4}{2.4.5.(1+u^2)^2}+\&c.\right)$$

IV. Es ſei $\mathfrak{AT}'u=x$, ſo iſt

$$u=\mathfrak{T}'x$$

$$u=\frac{\mathfrak{S}'x}{\mathfrak{S}x}$$

$$u=\frac{\sqrt{(1-\mathfrak{S}x^2)}}{\mathfrak{S}x}$$

$$u^2=\frac{1-\mathfrak{S}x^2}{\mathfrak{S}x^2}$$

$$u^2\mathfrak{S}x^2=1-\mathfrak{S}x^2$$

$$u^2\mathfrak{S}x^2+\mathfrak{S}x^2=1$$

$$\mathfrak{S}x^2(1+u^2)=1$$

$$\mathfrak{S}x^2=\frac{1}{1+u^2}$$

$$\mathfrak{S}x=\frac{1}{\sqrt{(1+u^2)}}$$

Der Arkus zu dieſem Sinus iſt

$$\frac{1}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{2.3.(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1.3}{2.4.5.(1+u^2)^{\frac{5}{2}}}+\&c.$$

oder

oder

$$\frac{1}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}}\left(1+\frac{1}{2.3.(1+u^2)}+\frac{1.3}{2.4.5.(1+u^2)^2}+\&c.\right)$$

Es wird also

$$\mathfrak{A}\mathfrak{T}u=\frac{1}{\sqrt{(1+u^2)}}\left(1+\frac{1}{2.3.(1+u^2)}+\frac{1.3}{2.4.5.(1+u^2)^2}+\&c.\right)$$

V) Es sei $\mathfrak{A}\mathfrak{ß}u=x$, so ist

$$u=\mathfrak{ß}x=\frac{1}{\mathfrak{S}x}=\frac{1}{\sqrt{(1-\mathfrak{S}x^2)}}$$

daher ist $u^2=\frac{1}{1-\mathfrak{S}x^2}$

$$u^2-u^2\mathfrak{S}x^2=1$$
$$u^2-1=u^2\mathfrak{S}x^2$$
$$\frac{u^2-1}{u^2}=\mathfrak{S}x^2$$
$$\frac{\sqrt{(u^2-1)}}{u}=\mathfrak{S}x$$

Hiervon ist der Arkus

$$\frac{(u^2-1)^{\frac{1}{2}}}{u}+\frac{1.(u^2-1)^{\frac{3}{2}}}{2.3.u^3}+\frac{1.3.(u^2-1)^{\frac{5}{2}}}{2.4.5.u^5}+\frac{1.3.5.(u^2-1)^{\frac{7}{2}}}{2.4.6.7.u^7}$$

oder

$$\frac{\sqrt{(u^2-1)}}{u}\left(1+\frac{1.(u^2-1)}{2.3.u^2}+\frac{1.3.(u^2-1)^2}{2.4.5.u^4}+\&c.\right)$$

Also ist

$$\mathfrak{A}\mathfrak{ß}u=\frac{\sqrt{(u^2-1)}}{u}\left(1+\frac{1(u^2-1)}{2.3.u^2}+\frac{1.3.(u^2-1)^2}{2.4.5.u^4}+\&c.\right)$$

VI) Es sei $\mathfrak{A}\mathfrak{B}' u = x$, so ist

$$u = \mathfrak{B}' x$$

$$u' = \frac{1}{\mathfrak{S} x}$$

$$u \mathfrak{S} x = 1$$

$$\mathfrak{S} x = \frac{1}{u}$$

Hiervon ist der Arkus

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{2.3.u^3} + \frac{1.3}{2.4.5.u^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7.u^7} + \mathfrak{c}.$$

Also ist

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} u = \frac{1}{u} + \frac{1}{2.3.u^3} + \frac{1.3}{2.4.5.u^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7.u^7} + \mathfrak{c}.$$

VII) Es sei $\mathfrak{A}\mathfrak{V} u = x$, so ist

$$u = \mathfrak{V} x$$

$$u = 1 - \mathfrak{S}' x$$

$$u = 1 - \sqrt{(1 - \mathfrak{S} x^2)}$$

$$\sqrt{(1 - \mathfrak{S} x^2)} = 1 - u$$

$$1 - \mathfrak{S} x^2 = (1 - u)^2$$

$$1 - \mathfrak{S} x^2 = 1 - 2u + u^2$$

$$2u - u^2 = \mathfrak{S} x^2$$

$$\sqrt{(2u - u^2)} = \mathfrak{S} x$$

Hiervon ist der Arkus

$$(2u - u^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1.(2u - u^2)^{\frac{3}{2}}}{2.3} + \frac{1.3.(2u - u^2)^{\frac{5}{2}}}{2.4.5} + \mathfrak{c}.$$

oder

$$\sqrt{(2u - u^2)} \left(1 + \frac{1.(2u - u^2)}{2.3} + \frac{1.3.(2u - u^2)^2}{2.4.5} + \mathfrak{c}. \right)$$

Also ist

$$\mathfrak{AV}u = \sqrt{(2u-u^2)}.\left(1+\frac{1.(2u-u^2)}{2.3}+\frac{1.3.(2u-u^2)^2}{2.4.5}+\&c.\right)$$

VIII) Es sei $\mathfrak{AV}'u = x$, so ist

$$u = \mathfrak{V}'x$$
$$u = 1 - \mathfrak{S}x$$
$$\mathfrak{S}x = 1 - u$$

Hiervon ist der Arkus

$$(1-u)+\frac{1.(1-u)^3}{2.3}+\frac{1.3.(1-u)^5}{2.4.5}+\frac{1.3.5.(1-u)^7}{2.4.6.7}+\&c.$$

Also ist

$$\mathfrak{AV}'u = (1-u)+\frac{1.(1-u)^3}{2.3}+\frac{1.3.(1-u)^5}{2.4.5}+\&c.$$

Zusatz. Die meisten von diesen Reihen können zwar noch auf eine andere Art ausgedrucket werden; wir haben aber hier solche Ausdrücke gesuchet, die sich leicht finden und beweisen laßen. Jedesmal also, wenn solche Größen als $\mathfrak{AS}u$, $\mathfrak{AS}'u$, $\mathfrak{AT}u$, u. s. f. vorkommen, braucht man sich weiter nichts dabei vorzustellen, als die Reihen, welche wir in diesem Paragraph herausgebracht haben.

§. 9.

Aufgabe.

Kreisgrößen differenziren.

Auflösung. Man brauche folgende 16 Formeln

I) $\mathfrak{d}\mathfrak{S}x = \mathfrak{d}x\mathfrak{S}'x$

II) $\mathfrak{d}\mathfrak{S}'x = -\mathfrak{d}x\mathfrak{S}x$

III) $\mathfrak{d}\mathfrak{T}x = \frac{\mathfrak{d}x}{\mathfrak{S}'x^2}$

IV) $\mathfrak{d}\mathfrak{T}x = \frac{-\mathfrak{d}x}{\mathfrak{S}'x^2}$

V) $d\mathfrak{s}x = \frac{dx\mathfrak{S}x}{\mathfrak{S}'x^2} = \frac{dx\mathfrak{T}x}{\mathfrak{S}'x}$

VI) $d\mathfrak{s}'x = \frac{-dx\mathfrak{S}'x}{\mathfrak{S}x^2} = \frac{-dx\mathfrak{T}'x}{\mathfrak{S}x}$

VII) $d\mathfrak{V}x = dx\mathfrak{S}x$

VIII) $d\mathfrak{V}'x = -dx\mathfrak{S}'x$

IX) $d\mathfrak{A}\mathfrak{S}x = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$

X) $d\mathfrak{A}\mathfrak{S}'x = \frac{-dx}{\sqrt{(2-x^2)}}$

XI) $d\mathfrak{A}\mathfrak{T}x = \frac{dx}{1+x^2}$

XII) $d\mathfrak{A}\mathfrak{T}'x = \frac{-dx}{1+x^2}$

XIII) $d\mathfrak{A}\mathfrak{s}x = \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-1)}}$

XIV) $d\mathfrak{A}\mathfrak{s}'x = \frac{-dx}{x\sqrt{(x^2-1)}}$

XV) $d\mathfrak{A}\mathfrak{V}x = \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}}$

XVI) $d\mathfrak{A}\mathfrak{V}'x = \frac{-dx}{\sqrt{(2x-x^2)}}$

Beweis der Formeln.

I. Man differenzire

$$\mathfrak{S}x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \&c.$$

so

so kommt

$$dSx = dx\left(1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \&c.\right)$$

oder $dSx = dxS'x$

II. Man differenzire

$$S'x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \&c.$$

so kommt

$$dS'x = -dx\left(x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \&c.\right)$$

oder $dS'x = -dxSx$

III. Weil

$$Tx = \frac{Sx}{S'x}$$

so ist $dTx = \frac{S'x.dSx - Sx.dS'x}{S'x^2}$

Setzet man nun $dxS'x$ anstatt dSx, und $-dxSx$ anstatt $dS'x$, so wird

$$dTx = \frac{dxS'x^2 + dx.Sx^2}{S'x^2} = \frac{(S'x^2 + Sx^2)dx}{S'x^2}$$

Es ist aber $S'x = \sqrt{(1 - Sx^2)}$, folglich $S'x^2 = 1 - Sx^2$, folglich $Sx^2 + Sx^2 = (1 - Sx^2) + Sx^2 = 1$. Also wird

$$dTx = \frac{dx}{S'x^2}$$

IV. Weil

$$Tx = \frac{S'x}{Sx}$$

$$\text{so ist } \mathfrak{d}\mathfrak{T}x = \frac{\mathfrak{S}x.\mathfrak{d}\mathfrak{S}'x - \mathfrak{S}'x.\mathfrak{d}\mathfrak{S}x}{\mathfrak{S}x^2}$$

Setzet man $-\mathfrak{d}x\mathfrak{S}x$ anstatt $\mathfrak{d}\mathfrak{S}'x$ und $\mathfrak{d}x\mathfrak{S}'x$ anstatt $\mathfrak{d}\mathfrak{S}x$, so wird

$$\mathfrak{d}\mathfrak{T}'x = \frac{-\mathfrak{S}x^2\mathfrak{d}x - \mathfrak{S}'x^2\mathfrak{d}x}{\mathfrak{S}x^2} = \frac{-(\mathfrak{S}x^2 + \mathfrak{S}'x^2)\mathfrak{d}x}{\mathfrak{S}x^2}$$

und da bei voriger Formel bewiesen worden, daß $\mathfrak{S}x^2 + \mathfrak{S}'x^2 = 1$, so ist

$$\mathfrak{d}\mathfrak{T}x = \frac{-\mathfrak{d}x}{\mathfrak{S}x^2}$$

V. Weil

$$\mathfrak{ß}x = \frac{1}{\mathfrak{S}'x}$$

$$\text{so ist } \mathfrak{d}\mathfrak{ß}x = \frac{-\mathfrak{d}\mathfrak{S}'x}{\mathfrak{S}'x}$$

Man setze $-\mathfrak{d}x\mathfrak{S}x$ anstatt $\mathfrak{d}\mathfrak{S}'x$, so wird

$$\mathfrak{d}\mathfrak{ß}x = \frac{+\mathfrak{d}x\mathfrak{S}x}{\mathfrak{S}x^2} = \frac{\mathfrak{d}x\mathfrak{T}x}{\mathfrak{S}'x}$$

VI. Weil

$$\mathfrak{ß}'x = \frac{1}{\mathfrak{S}x}$$

$$\text{so ist } \mathfrak{d}\mathfrak{ß}x = \frac{-\mathfrak{d}\mathfrak{S}x}{\mathfrak{S}x^2} = \frac{-\mathfrak{d}x\mathfrak{S}'x}{\mathfrak{S}x^2} = \frac{-\mathfrak{d}x\mathfrak{T}'x}{\mathfrak{S}x}$$

VII. Weil

$$\mathfrak{V}x = 1 - \mathfrak{S}'x$$

$$\text{so ist } \mathfrak{d}\mathfrak{V}x = -\mathfrak{d}\mathfrak{S}'x$$

$$\text{und weil } \mathfrak{d}\mathfrak{S}'x = -\mathfrak{d}x\mathfrak{S}x, \text{ so wird}$$

$$\mathfrak{d}\mathfrak{V}x = \mathfrak{d}x\mathfrak{S}x$$

VIII.

VIII) Weil

$$\mathfrak{V}'x = 1 - \mathfrak{S}x$$

so ist $\mathrm{d}\mathfrak{V}'x = -\mathrm{d}\mathfrak{S}x$

und weil $\mathrm{d}\mathfrak{S}x = \mathrm{d}x\mathfrak{S}'x$, so ist

$$\mathrm{d}\mathfrak{V}'x = -\mathrm{d}x\mathfrak{S}'x$$

IX) Es ist, vermöge der ersten Formel,

$$\mathrm{d}\mathfrak{S}x = \mathrm{d}x\mathfrak{S}'x$$

daher $$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}\mathfrak{S}x}{\mathfrak{S}'x}$$

Es sei $\mathfrak{S}x = u$, so ist $x = \mathfrak{AS}u$, es ist auch $\mathfrak{S}'x = \sqrt{(1-\mathfrak{S}x^2)} = \sqrt{(1-u^2)}$. Deswegen wird

$$\mathrm{d}\mathfrak{AS}u = \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(1-u^2)}}$$

X) Es ist, vermöge der zweiten Formel,

$$\mathrm{d}\mathfrak{S}'x = -\mathrm{d}x\mathfrak{S}x$$

daher $$\mathrm{d}x = \frac{-\mathrm{d}\mathfrak{S}'x}{\mathfrak{S}x}$$

Wenn $\mathfrak{S}'x = u$, so ist $x = \mathfrak{AS}'u$, und $\mathfrak{S}x = \sqrt{(1+\mathfrak{S}'x^2)} = \sqrt{(1-u^2)}$. Denn man hat im Beweise der 3ten und 4ten Formel gesehen, daß $\mathfrak{S}x^2 + \mathfrak{S}'x^2 = 1$, folglich $\mathfrak{S}x^2 = 1 - \mathfrak{S}'x^2$ und $\mathfrak{S}x = \sqrt{(1-\mathfrak{S}'x^2)}$. Also wird

$$\mathrm{d}\mathfrak{AS}'u = \frac{-\mathrm{d}u}{\sqrt{(1-u^2)}}$$

XI) Aus der dritten Formel ist

$$\mathrm{d}\mathfrak{T}x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathfrak{S}'x^2}$$

folglich $$\mathrm{d}x = \mathfrak{S}'x^2\mathrm{d}\mathfrak{T}x$$

Es ist aber

$$\mathfrak{T}x = \frac{\mathfrak{S}x}{\mathfrak{S}'x}$$

oder $$\mathfrak{T}x = \frac{\sqrt{(1-\mathfrak{S}'x^2)}}{\mathfrak{S}'x}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}x\mathfrak{S}'x &= \sqrt{(1-\mathfrak{S}'x^2)} \\ \mathfrak{T}x^2\mathfrak{S}'x^2 &= 1-\mathfrak{S}'x^2 \\ \mathfrak{T}x^2\mathfrak{S}'x^2+\mathfrak{S}'x^2 &= 1 \\ \mathfrak{S}'x^2(\mathfrak{T}x^2+1) &= 1 \end{aligned}$$

$$\mathfrak{S}'x^2 = \frac{1}{1+\mathfrak{T}x^2}$$

Setzet man diesen Werth von $\mathfrak{S}'x^2$ in die Gleichung

$$dx = \mathfrak{S}'x^2\, d\mathfrak{T}x$$

so ist $$dx = \frac{d\mathfrak{T}x}{1+\mathfrak{T}x^2}$$

Es sei $\mathfrak{T}x = u$, so ist $x = \mathfrak{AT}u$, und es wird

$$d\mathfrak{AT}u = \frac{du}{1+u^2}$$

XII) Es ist, aus der vierten Formel,

$$d\mathfrak{T}'x = \frac{-dx}{\mathfrak{S}x^2}$$

daher $$dx = -\mathfrak{S}x^2 d\mathfrak{T}'x$$

Es

Es ist aber

$$\mathfrak{T}'x = \frac{\mathfrak{S}'x}{\mathfrak{S}x}$$

$$\mathfrak{T}'x = \frac{\sqrt{(1-\mathfrak{S}x^2)}}{\mathfrak{S}x}$$

$$\mathfrak{S}x\mathfrak{T}'x = \sqrt{(1-\mathfrak{S}x^2)}$$

$$\mathfrak{S}x^2\mathfrak{T}'x^2 = 1-\mathfrak{S}x^2$$

$$\mathfrak{S}x^2\mathfrak{T}'x^2+\mathfrak{S}x^2 = 1$$

$$\mathfrak{S}x^2(1+\mathfrak{T}'x^2) = 1$$

$$\mathfrak{S}x^2 = \frac{1}{1+\mathfrak{T}'x^2}$$

Setzet man diesen Werth von $\mathfrak{S}x^2$ in die Gleichung

$$\delta x = -\mathfrak{S}x^2\delta\mathfrak{T}'x$$

so ist $\delta x = \frac{-\delta\mathfrak{T}'x}{1+\mathfrak{T}'x^2}$

Es sei $\mathfrak{T}'x = u$, so ist $x = \mathfrak{AT}'u$ und es wird

$$\delta\mathfrak{AT}'u = \frac{-\delta u}{1+u^2}$$

XIII) Es ist aus der fünften Formel

$$\delta\mathfrak{B}x = \frac{\delta x\mathfrak{S}x}{\mathfrak{S}'x^2}$$

daher $\mathfrak{S}'x^2\delta\mathfrak{B}x = \delta x\mathfrak{S}x$

$$\frac{\mathfrak{S}'x^2\delta\mathfrak{B}x}{\mathfrak{S}x} = \delta x$$

Es

$$\text{Es ist aber } \mathfrak{B}x = \frac{1}{\mathfrak{S}'x}$$

$$\text{daher } \mathfrak{S}'x\mathfrak{B}x = 1$$

$$\mathfrak{S}'x = \frac{1}{\mathfrak{B}x}$$

$$\mathfrak{S}'x^2 = \frac{1}{\mathfrak{B}x^2}$$

$$\text{oder es ist } \mathfrak{B}x = \frac{1}{\sqrt{(1+\mathfrak{S}x^2)}}$$

$$\mathfrak{B}x^2 = \frac{1}{1+\mathfrak{S}x^2}$$

$$\mathfrak{B}x^2 - \mathfrak{S}x^2\mathfrak{B}x^2 = 1$$

$$-\mathfrak{S}x^2\mathfrak{B}x^2 = 1 - \mathfrak{B}x^2$$

$$\mathfrak{S}x^2\mathfrak{B}x^2 = \mathfrak{B}x^2 - 1$$

$$\mathfrak{S}x^2 = \frac{\mathfrak{B}x^2 - 1}{\mathfrak{B}x^2}$$

$$\mathfrak{S}x = \frac{\sqrt{(\mathfrak{B}x^2 - 1)}}{\mathfrak{B}x}$$

Setzet man die gefundenen Werthe von $\mathfrak{S}'x^2$ und $\mathfrak{S}x$, in die Gleichung

$$dx = \frac{\mathfrak{S}'x^2 d\mathfrak{B}x}{\mathfrak{S}x}$$

$$\text{so wird } dx = \frac{\mathfrak{B}x d\mathfrak{B}x}{\mathfrak{B}x^2\sqrt{(\mathfrak{B}x^2 - 1)}} = \frac{d\mathfrak{B}x}{\mathfrak{B}x\sqrt{(\mathfrak{B}x^2 - 1)}}$$

Ist nun $\mathfrak{B}x = u$, so wird $x = \mathfrak{A}\mathfrak{B}u$, und man bekommt

$$d\mathfrak{A}\mathfrak{B}x = \frac{du}{u\sqrt{(u^2-1)}}$$

XIV)

XIV) Es ist, aus der sechsten Formel,

$$\mathfrak{d}\mathfrak{B}'x = \frac{-\mathfrak{d}x\mathfrak{S}'x}{\mathfrak{S}x^2}$$

daher $\mathfrak{S}x^2\mathfrak{d}\mathfrak{B}'x = -\mathfrak{d}x\mathfrak{S}'x$

und $\mathfrak{d}x = \frac{-\mathfrak{S}x^2\mathfrak{B}'x}{\mathfrak{S}'x}$

Es ist aber

$$\mathfrak{B}'x = \frac{1}{\mathfrak{S}x}$$

daher $\mathfrak{S}x = \frac{1}{\mathfrak{B}'x}$

$$\mathfrak{S}x^2 = \frac{1}{\mathfrak{B}'x^2}$$

Es ist auch

$$\mathfrak{B}'x = \frac{1}{\sqrt{(1-\mathfrak{S}'x^2)}}$$

$$\mathfrak{B}'x^2 = \frac{1}{1-\mathfrak{S}'x^2}$$

$$\mathfrak{B}'x^2 - \mathfrak{S}'x^2\mathfrak{B}x^2 = 1$$

$$-\mathfrak{S}'x^2\mathfrak{B}x^2 = 1 - \mathfrak{B}'x^2$$

$$\mathfrak{S}'x^2\mathfrak{B}x^2 = \mathfrak{B}'x^2 - 1$$

$$\mathfrak{S}'x^2 = \frac{\mathfrak{B}'x^2 - 1}{\mathfrak{B}x^2}$$

$$\mathfrak{S}'x = \frac{\sqrt{(\mathfrak{B}'x^2 - 1)}}{\mathfrak{B}'x}$$

Setzet

Setzet man die gefundenen Werthe von $\mathfrak{S}x^2$ und $\mathfrak{S}'x$ in die Gleichung

$$\mathfrak{d}x = \frac{-\mathfrak{S}x^2\mathfrak{d}\mathfrak{ß}'x}{\mathfrak{S}'x}$$

so wird

$$\mathfrak{d}x = \frac{-\mathfrak{ß}'x\mathfrak{d}\mathfrak{ß}'x}{\mathfrak{ß}'x^2\sqrt{(\mathfrak{ß}'x^2-1)}} = \frac{-\mathfrak{d}\mathfrak{ß}'x}{\mathfrak{ß}'x\sqrt{(\mathfrak{ß}'x^2-1)}}$$

Es sei $\mathfrak{ß}'x = u$, so ist $x = \mathfrak{A}\mathfrak{ß}'u$, folglich

$$\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{ß}'u = \frac{-\mathfrak{d}u}{u\sqrt{(u^2-1)}}$$

XV) Es ist, aus der siebenten Formel,

$$\mathfrak{d}\mathfrak{V}x = \mathfrak{d}x\mathfrak{S}x$$

daher $$\mathfrak{d}x = \frac{\mathfrak{d}\mathfrak{V}x}{\mathfrak{S}x}$$

Es ist aber $\mathfrak{V}x = 1-\mathfrak{S}'x$

oder $\mathfrak{V}x = 1-\sqrt{(1-\mathfrak{S}x^2)}$

$\mathfrak{V}x-1 = -\sqrt{(1-\mathfrak{S}x^2)}$

$1-\mathfrak{V}x = \sqrt{(1-\mathfrak{S}x^2)}$

$1-2\mathfrak{V}x+\mathfrak{V}x^2 = 1-\mathfrak{S}x^2$

$\mathfrak{S}x^2 = 2\mathfrak{V}x-\mathfrak{V}x^2$

$\mathfrak{S}x = \sqrt{(2\mathfrak{V}x-\mathfrak{V}x^2)}$

Diesen Werth von $\mathfrak{S}x$ setze man in die Gleichung

$$\mathfrak{d}x = \frac{\mathfrak{d}\mathfrak{V}x}{\mathfrak{S}x}$$

so kommt $$\mathfrak{d}x = \frac{\mathfrak{d}\mathfrak{V}x}{\sqrt{(2\mathfrak{V}x-\mathfrak{V}x^2)}}$$

Es

Es sei $\mathfrak{V}x = u$, so ist $x = \mathfrak{AV}u$, und

$$\mathfrak{d}\mathfrak{AV}u = \frac{\mathfrak{d}u}{\sqrt{(2u - u^2)}}$$

XVI) Es ist, vermöge der achten Formel,

$$\mathfrak{d}\mathfrak{V}'x = -\mathfrak{d}x\mathfrak{S}'x$$

$$\text{daher } \mathfrak{d}x = \frac{-\mathfrak{d}\mathfrak{V}'x}{\mathfrak{S}'x}$$

Es ist aber

$$\mathfrak{V}'x = 1 - \mathfrak{S}x$$

$$\mathfrak{V}'x = 1 - \sqrt{(1 - \mathfrak{S}'x^2)}$$

$$(\sqrt{1 - \mathfrak{S}'x^2}) = 1 - \mathfrak{V}'x$$

$$1 - \mathfrak{S}'x^2 = 1 - 2\mathfrak{V}'x + \mathfrak{V}'x^2$$

$$2\mathfrak{V}'x - \mathfrak{V}'x^2 = \mathfrak{S}'x^2$$

$$\sqrt{(2\mathfrak{V}'x - \mathfrak{V}'x^2)} = \mathfrak{S}'x$$

Setzet man diesen Werth von $\mathfrak{S}'x$ in die Gleichung

$$\mathfrak{d}x = \frac{-\mathfrak{d}\mathfrak{V}x}{\mathfrak{S}'x}$$

$$\text{so ist } \mathfrak{d}x = \frac{-\mathfrak{d}\mathfrak{V}'x}{\sqrt{(2\mathfrak{V}'x - \mathfrak{V}x^2)}}$$

Es sei $\mathfrak{V}'x = u$, so ist $x = \mathfrak{AV}'u$, folglich

$$\mathfrak{d}\mathfrak{AV}'u = \frac{-\mathfrak{d}u}{\sqrt{(2u - u^2)}}$$

§. 7.

Alle vorhergehende Differenziale haben einen großen Nutzen in algebraischen Rechnungen. Uebrigens pfleget

ger man ſolche Größen, welche eigentlich unendliche Reihen vorſtellen, als Sx, ΔSx, u. ſ. f. überſteigende oder tranſzendente Größen zu nennen. Dahin rechnet man auch die Logarithmen, welche, wie wir im vorigen Hauptſtücke geſehen haben, durch unendliche Reihen ausgedrucket werden. In dieſem Verſtande wären zweytheilige oder vieltheilige Größen mit gebrochenen Exponenten auch überſteigend, weil ſie nicht anders als durch unendliche Reihen entwickelt werden können. Es ſcheinet überhaupt eine überſteigende Größe in der Algebra eine jede Größe zu ſeyn, deren Werth nie ganz rein ausgedrucket, ſondern nur durch eine Näherung ohne Ende gefunden wird.

Zwanzigstes Hauptstück.

Von der Integral-Rechnung, oder von der Erfindung der Funkzionen aus ihren Differenzialen.

§. 1.

Im XIV. Hauptstücke haben wir gelehret, wie aus der endlichen oder vollständigen Veränderung einer Funkzion, die Funkzion selbst gefunden werden kann. Hier muß gezeiget werden, wie die Funkzion aus ihrer unvollständigen oder unendlich kleinen Veränderungen zu erforschen ist. Das gegebene Differenzial nennet man manchmal das Element der gesuchten Funkzion, und diese ist das Integral. Die Rechnung selbst, wodurch das Integral gefunden wird, heißt die Integral-Rechnung.

§. 2.

Das gesuchte Integral pfleget man durch den Buchstaben $\int$ anzudeuten. Also bedeutet zum Beispiel dieser Ausdruck

$$\int \frac{a\,dx}{(p+qx)^n}$$

daß man eine Funkzion von x suchen soll, deren Differenzial

$$\frac{a\,dx}{(p+qx)^n}$$

ist. Dem Anfänger zu Gefallen, der dieses $\int$ für eine Größe ansehen könnte, da es doch ein bloßes Zeichen ist,

wollen wir uns lieber des deutschen ſ bedienen. Wir werden alſo ſchreiben

$$\int \frac{a\,dx}{(p+qx)^n}$$

§. 3.

In der Integral-Rechnung kommen ſehr verſchiedene Fälle in Betrachtung. Denn es kann die gegebene Funkzion entweder nur eine, oder mehr als eine veränderliche Größe enthalten. Es kann auch die gegebene Funkzion entweder von der erſten oder von einer höheren Differenzial-Ordnung ſein. Es kann ferner die Funkzion ganz oder gebrochen, razional oder irrazional ſein. Sie kann logarithmiſche Größen oder Kreisgrößen enthalten. Wenn wir alle dieſe verſchiedenen Fälle und die Aufgaben die daraus entſtehen, unterſuchen wollten, ſo wäre ein Buch, wie dieſe ganze Anweiſung zur Algebra, kaum hinreichend. Ueberdem iſt die Integral-Rechnung bisher noch keine vollſtändige Kunſt, ſondern ſie beſtehet meiſtens in mehr oder weniger glücklichen Verſuchen, welche verſchiedene große Mathematiker gemacht haben, um die dahin einſchlagenden Aufgaben aufzulöſen. Wir müſſen uns alſo damit begnügen, daß wir in dieſem Hauptſtücke dasjenige vortragen, was zum weiteren Fortgange in der Mathematik unentbehrlich iſt. Wenn jemand nur ſo weit gekommen iſt, daß er allerlei mathematiſche Schriften verſtehen kann, ſo wird er auch nach und nach die beſonderen Kunſtgriffe der Mathematiker bei der Auflöſung ſchwerer Aufgaben kennen und nachahmen lernen.

§. 4.

Aufgabe.

Eine Differenzial-Funkzion von einer einzigen veränderlichen Größe integriren.

Auflö-

Auflösung. Hierzu dienen folgende Formeln.

Differenzial-Funktionen.	Deren Integrale.
I) dx	$x + c$
II) $a dx$	$ax + c$
III) $x^n dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
IV) $(a+x)^n dx$	$\frac{(a+x)^{n+1}}{n+1} + c$
V) $(a+bx)^n dx$	$\frac{(a+bx)^{n+1}}{(n+1)b} + c$
VI) $\frac{dx}{(a+bx)^n}$	$\frac{-1}{b(n-1)(a+bx)^{n-1}} + c$
VII) $\frac{dx}{x}$	$lx + c$
VIII) $\frac{dx}{a+x}$	$l(a+x) + c$
IX) $\frac{dx}{a+bx}$	$\frac{1}{b} l\frac{a+bx}{b} + c = \frac{1}{b} l\frac{a+bx}{c}$
X) $\frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$	$l[x+\sqrt{(a^2+x^2)}] + c$
XI) $\frac{dx}{x\sqrt{(a^2+x^2)}}$	$\frac{1}{2a} l\frac{-a+\sqrt{(a^2+x^2)}}{a+\sqrt{(a^2+x^2)}} + c$
XII) $\frac{dx}{x\sqrt{(a^2-x^2)}}$	$\frac{1}{2a} l\frac{a-\sqrt{(a^2-x^2)}}{a+\sqrt{(a^2-x^2)}} + c$
XIII) $\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$	$\mathfrak{AS}\frac{x}{a} + c = -\mathfrak{AS}'\frac{x}{a} + c$

Differenzial-Funkzionen.	Deren Integrale.
XIV) $\frac{dx}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a}\mathfrak{A}\mathfrak{T}\frac{x}{a}+c=-\frac{1}{a}\mathfrak{A}\mathfrak{T}'\frac{x}{a}+c$
XV) $\frac{dx}{x\sqrt{(x^2-a^2)}}$	$\frac{1}{a}\mathfrak{A}\mathfrak{ß}\frac{x}{a}+c=-\frac{1}{a}\mathfrak{A}\mathfrak{ß}'\frac{x}{a}+c$
XVI) $\frac{dx}{\sqrt{(ax-x^2)}}$	$\mathfrak{AV}\frac{2x}{a}+c=-\mathfrak{AV}'\frac{2x}{a}+c$
XVII) $\frac{dx}{x\,lx}$	$llx+c$
XVIII) $\frac{dx}{x\,lx\,llx}$	$lllx+c$
XIX) $\frac{dx}{x\,lx\,l^2x\ldots l^nx}$	$l^{n+1}x+c$
XX) $\frac{dx(lx)^n}{x}$	$\frac{(lx)^{n+1}}{n+1}+c$
XXI) $\frac{dx(llx)^n}{x\,lx}$	$\frac{(llx)^{n+1}}{n+1}+c$
XXII) $\frac{dx(l^mx)^n}{x\,lx\,l^2x\ldots l^{m-1}x}$	$\frac{(l^mx)^{n+1}}{n+1}+c$
XXIII) $e^x dx$	e^x+c
XXIV) $a^x dx$	$\frac{a^x}{la}+c$
XXV) $-dx\,\mathfrak{S}'x$	$\mathfrak{S}x+c=-\mathfrak{V}'x+c$
XXVI) $dx\,\mathfrak{S}x$	$-\mathfrak{S}'x+c=\mathfrak{V}x+c$
XXVII) $\frac{dx}{\mathfrak{S}'x^2}$	$\mathfrak{T}x+c$

Differenzial-Funktionen.	Deren Integrale.
XXVIII) $\frac{dx}{Sx^2}$	$-\frac{T'x}{S'x}+c$
XXIX) $\frac{dxSx}{S'x^2+F^2}=\frac{dxTx}{S'x}$	$fx+c$
XXX) $\frac{dxSx}{Sx^2\sqrt{}}=\frac{dxTx}{Sx}$	$fx+c$

Beweis. Anstatt jede Formel besonders zu beweisen, wollen wir nur überhaupt bemerken, daß die Differenzial-Funktion in der Spalte zur Linken allemal entstehen muß, wenn man die Funktion welche zur Rechten gegenüber stehet, gehörig differenziret. Durch dieses Mittel kann sich der Leser die Formeln alle nach einander selbst beweisen. Auch werden einige derselben bei den folgenden Aufgaben noch besonders erkläret werden.

Zusatz I. Die Größe c, welche jedem Integrale beigefüget ist, ist die willkürliche beständige Größe, wovon schon im XV. Hauptst. §. 9 und §. 10 gesprochen worden.

Zusatz II. Wenn die Differenzial-Formel noch mit beständigen Größen multipliziret oder dividiret ist, so muß auch das Integral ebenfalls multipliziret oder dividiret werden. Zum Beispiel es ist

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)}}=l[x+\sqrt{(ax+x^2)}]+c$$

folglich wird sein

$$\int\frac{pdx}{q\sqrt{(a^2+x^2)}}=\frac{p}{q}\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)}}=\frac{p}{q}l[x+\sqrt{(a^2+x^2)}]+c$$

Siehe das XV. Hauptst. §. 5.

Zusatz III. Wenn die gegebene Differential-Funkzion mehrere Glieder enthält, so wird jedes Glied insbesondere integriret (XV. Hauptstück §. 4). Zum Beispiel

$$\int\left((1+x)^3\,dx+\frac{a\,dx}{a^2+x^2}+\frac{b\,dx}{a+x}\right)$$

$$=\int(1+x)^3\,dx+a\int\frac{dx}{a^2+x^2}+b\int\frac{dx}{a+x}$$

$$=\frac{(1+x)^4}{4}+\mathfrak{AT}\frac{x}{a}+b\,l(a+x)+c$$

Zusatz IV. Wenn die gegebene Funkzion ein Bruch ist, der sich in mehrere Brüche zertheilen läßt, (XIII. Hauptst. §. 16) so verrichte man diese Zertheilung, und integrire jeden Theil insbesondere. Z. B. Es sei zu integriren

$$\frac{dx+2x\,dx+3x^2\,dx}{-6-5x+2x^2+x^3}=\frac{(1+2x+3x^2)\,dx}{-6-5x+2x^2+x^3}$$

Dieser Ausdruck bestehet aus folgenden Brüchen (XIII. Hauptst. §. 16. Beispiel I.)

$$\frac{dx}{3(x+1)}+\frac{17\,dx}{15(x-2)}+\frac{11\,dx}{5(x+3)}$$

Und hiervon ist das Integral

$$\frac{l(1+x)}{3}+\frac{17\,l(x-2)}{15}+\frac{11\,l(x+3)}{5}$$

Zusatz V. Wenn keine Formeln auf eine gegebene Differential-Funkzion passen wollen, so verwandele man die Funkzion in eine unendliche Reihe. Zum Beispiel es soll integriret werden

$$\frac{4x\,dx}{3+2x+5x^3}$$

Die-

Dieser Ausdruck verwandelt sich in folgende Reihe (XIII. Hauptst. §. 17. Beispiel I.)

$$\frac{4}{3}xdx - \frac{8}{9}x^2dx - \frac{44}{27}x^3dx + \frac{208}{81}x^4dx + \frac{244}{243}x^5dx + \&c.$$

Hiervon ist das Integral

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{8}{9}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{44}{27}\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{208}{81}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{244}{243}\cdot\frac{x^6}{6} + \&c.$$

oder

$$\frac{2x^2}{3} - \frac{8x^3}{27} - \frac{11x^4}{27} + \frac{208x^5}{405} + \frac{122x^6}{729} + \&c.$$

Also ist

$$\int\frac{4xdx}{3+2x+5x^2} = \frac{2x^2}{3} - \frac{8x^3}{27} - \frac{11x^4}{27} + \frac{208x^5}{405} + \&c.$$

Zusatz VI. In einer Gleichung wird jedes Glied oder jedes Hauptglied für sich integriret. Z. B. Es soll diese Gleichung integriret werden

$$2dx - \frac{dx}{(1+5x)^3} = \frac{6dx}{5x^2} - \frac{2dx}{3xlx}$$

so bekommt man, wenn man Glied für Glied integriret

$$2x + \frac{1}{10(1+5x)^2} = -6\mathfrak{T}'x - \frac{2ll x}{3} + \&c.$$

Anmerkung I. Wir haben in der 19ten und in der 22ten Formel den Ausdruck $l^n x$ gebrauchet. Dadurch verstehen wir, daß l so vielmahl geschrieben werden soll, als n Einheiten hat. Z. B. $l^3 x$ heißt $lll x$, das ist, man soll von x den natürlichen Logarithmus nehmen, hernach wiederum den natürlichen Logarithmus der gefundenen Größe, und nochmal den natürlichen Logarithmus der letzt gefundenen Größe.

Anmerkung II. Obgleich die Formeln, welche im Anfange dieses Paragraphs gegeben worden, schon für viele Fälle hinreichend sind, so verdienen doch einige Differenzial-Funkzionen noch besonders betrachtet zu werden, hauptsächlich die irrazionalen, logarithmischen, und diejenigen welche Kreisgrößen enthalten.

§. 5.

Aufgabe.

Eine irrazionale Differenzial-Funkzion einer veränderlichen Größe integriren.

Auflösung. Eine solche Funkzion kann allemal in eine unendliche Reihe verwandelt, und alsdenn jedes Glied besonders integriret, werden. Jedoch giebt es Fälle, wo eine irrazionale Funkzion durch endliche Größen integriret werden kann. Man muß versuchen, die Funkzion razional zu machen, indem man eine andere veränderliche Größe als die gegebene unterschiebet. Zum Beispiel eine Formel die ziemlich häufig vorfällt, ist diese

$$x^m(a+bx^r)^s\,dx$$

Hier kann man auf zweierlei Art versuchen, die Funkzion razional zu machen.

Man nehme an, es sei

$$a+bx^r=u$$

so ist $bx^r=u-a$

$$x^r=\frac{u-a}{b}$$

$$x=\frac{(u-a)^{\frac{1}{r}}}{b^{\frac{1}{r}}} \text{ und } x^m=\frac{(u-a)^{\frac{m}{r}}}{b^{\frac{m}{r}}}$$

$$dx=\frac{\frac{1}{r}(u-a)^{\frac{1}{r}-1}du}{b^{\frac{1}{r}}}=\frac{du(u-a)^{\frac{1}{r}-1}}{rb^{\frac{1}{r}}}$$

Setzet

Setzet man nun die Werthe von $a+bx^r$, von x^m und von dx in die gegebene Funkzion, so entstehet

$$\frac{(u-a)^{\frac{m}{r}}}{b^{\frac{m}{r}}} \cdot u^s \cdot \frac{du(u-a)^{\frac{1}{r}-1}}{rb^{\frac{1}{r}}}$$

oder $$\frac{1}{rb^{\frac{m+1}{r}}} \cdot u^s\, du\,(u-a)^{\frac{m+1}{r}-1}$$

Diese neue Formel wird allemal razional, wenn $\frac{m+1}{r}$ und folglich auch $\frac{m+1}{r}-1$ eine ganze Zahl ist. Es sei gegeben

$$3x^3dx\sqrt{(1+x^2)}$$

oder $$3x^3(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dx$$

so ist hier $m=3$, $r=2$, folglich $\frac{m+1}{r}=\frac{4}{2}=2$, und $\frac{m+1}{r}-1=1$, also kann das gegebene Differenzial razional gemachet werden. Es ist ferner $s=\frac{1}{2}$, $a=1$, $b=1$. Setzet man alle diese Werthe in die Formel, so kommt anstatt $x^3(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dx$ folgendes:

$$\frac{1}{2} \cdot u^{\frac{1}{2}}\, du\,(u-1)$$

oder $$\frac{1}{2} \cdot u^{\frac{3}{2}}du - \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}} \cdot du$$

und wenn man integriret

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$$

oder $$\frac{1}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}$$

Multipliziret man nun noch mit dem Koeffizienten 3 der im gegebenen Differenziale ist, und setzet eine beständige Größe hinzu, so bekommt man

$$\frac{3}{5}u^{\frac{5}{2}} - u^{\frac{3}{2}} + c$$

oder wenn man anstatt u wiederum dessen Werth $1+x^2$ setzet,

$$\frac{3}{5}(1+x^2)^{\frac{5}{2}} - (1+x^2)^{\frac{3}{2}} + c$$

oder $$\frac{3}{5}\sqrt{(1+x^2)^3} - \sqrt{(1+x^2)^3} + c$$

Die nämliche Formel

$$x^m(a+bx^r)^s\,\partial x$$

kann noch auf eine andere Art rational gemacht werden. Wenn man $a+bx^r$ durch x^r dividiret und dann wiederum durch x^r multipliziret, so wird $a+bx^r = x^r(ax^{-r}+b)$, und $(a+bx^r)^s = x^{rs}(ax^{-r}+b)^s$. Multipliziret man nun mit $x^m\partial x$, so kommt

$$x^m(a+bx^r)^s\,\partial x = x^{m+rs}(ax^{-r}+b)^s\,\partial x$$

Nun nehme man an, es sei

$$ax^{-r}+b = u$$

und mache ähnliche Verrichtungen, wie bei vorigem Verfahren, so bekommt man

$$\frac{-1}{r\,a^{-\left(\frac{m+1}{r}+s\right)}}\,u^s\,\partial u\,(u-b)^{-\left(\frac{m+1}{r}+s+1\right)}$$

Wenn

Wenn man nun diese Formel integriren kann, so bekommt man eine Funktion des u, in welcher man wiederum $ax^{-r} + b$ anstatt u setzen muß. Diese Formel ist bequem, wenn der Exponent $-\left(\frac{m+1}{r} + s + 1\right)$ eine ganze bejahete Zahl oder auch null wird. Es sei zu integriren

$$\frac{\delta x y^{-}(1+x^2)}{x^6} = \delta x^{-6}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\delta x$$

Hier ist $m = -6$, $r = 2$, $s = \frac{1}{2}$, folglich

$$\begin{aligned} -\left(\frac{m+1}{r} + s + 1\right) &= -\left(\frac{-6+1}{2} + \frac{1}{2} + 1\right) \\ &= -\left(\frac{-5}{2} + \frac{1}{2} + 1\right) \\ &= -\left(\frac{-4}{2} + 1\right) \\ &= -(-2+1) \\ &= +2-1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

ferner ist $a = 1$, und $b = 1$

Setzet man nun diese Werthe in die gefundene Funktion von u, so hat man

$$-\frac{1}{2} \cdot u^{\frac{1}{2}}\delta u(u-1)^{\frac{1}{2}}$$

oder $-\frac{1}{2} \cdot u^{\frac{3}{2}}\delta u + \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}\delta u$

Hier-

Hiervon ist das Integral

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$$

oder $$-\frac{1}{5}\cdot u^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}$$

Multipliziret man noch mit dem gegebenen Koeffizienten 5, und setzet die willkührliche Größe zu, so wird das Integral

$$-u^{\frac{5}{2}}+\frac{5}{3}u^{\frac{3}{2}}+c$$

oder weil $u=ax^{-1}+b=1x^{-2}+1=\frac{1}{x^2}+1$

$$-\left(\frac{1}{x^2}+1\right)^{\frac{5}{2}}+\frac{5}{3}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)^{\frac{3}{2}}+c$$

oder $$-\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^{\frac{5}{2}}+\frac{5}{3}\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}+c$$

oder $$-\frac{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}{x^5}+\frac{5}{3}\cdot\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^3}+c$$

oder $$-\frac{\sqrt{(1+x^2)^5}}{x^5}+\frac{5\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}+c$$

§. 6.

Aufgabe.

Eine logarithmische Funkzion von x integriren.

Auflösung. Man kann die Funkzion in eine unendliche Reihe verwandeln, und dann jeden Satz integriren. Es sei zum Beispiel zu integriren:

$$\frac{dx}{1-x}lx \text{ oder } -\frac{dx}{x-1}lx$$

Man

Man weiß, daß

$$lx = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \&c.$$

folgl. $$\frac{lx}{x-1} = 1 - \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{3} - \frac{(x-1)^3}{4} + \&c.$$

$$-\frac{dx}{x-1}lx = -dx + \frac{(x-1)dx}{2} - \frac{(x-1)^2dx}{3} + \frac{(x-1)^3dx}{4} - \&c.$$

Man setze $x - 1 = z$, so ist $dx = dz$, und

$$-\frac{dx}{x-1}lx = -dz + \frac{zdz}{2} - \frac{z^2dz}{3} + \frac{z^3dz}{4} - \&c.$$

folgl. $$-\int\frac{dx}{x-1}lx \text{ oder } \int\frac{dx}{1-x}lx = C - z + \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{9} + \frac{z^4}{16} - \&c.$$

Will man, daß dieses Integral null werde, wenn $x = 0$, folglich $z = -1$, so wird $C = -1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{16} - \&c.$ und man bekommt

$$\int\frac{dx}{1-x}lx = -(x-1) + \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(x-1)^3}{9} + \frac{(x-1)^4}{16} - \&c.$$

$$-1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{16} - \&c.$$

Jedoch giebt es Fälle, wo man auch ohne unendliche Reihen integriren kann, wenn man nur die Formel auf eine geschickte Art verändert.

Es sei aufgegeben eine solche Formel

$$p\,dx\,lq$$

wo p und q algebraische Funkzionen von x sind, das ist, solche Funkzionen, worinn keine übersteigende Größen enthalten sind. Man beobachte daß

$$\int p\,dx\,lq = lq\int p\,dx - \int(dlq \cdot \int p\,dx)$$

$$= lq\int p\,dx - \int\frac{dq}{q}\int p\,dx$$

Denn

Denn es ist überhaupt

$$\int Qp\,dx = Q\int p\,dx - \int(dQ\int p\,dx)$$

wie man es findet, wenn man beiderseits differenziret, denn so kommt

$$Qp\,dx = Qp\,dx + dQ\int p\,dx - dQ\int p\,dx$$

oder $Qp\,dx = Qp\,dx$

Gesetzet also, man habe $p\,dx$ integriret, und das gefundene Integral sei V, so ist

$$\int p\,dx\,lq = lq\int p\,dx - \int\frac{dq}{q}\int p\,dx$$

$$= lq \cdot V - \int\frac{V\,dq}{q}$$

Findet es sich nun, daß $\frac{V\,dq}{q}$ eine algebraische Funkzion ist, die sich durch endliche Größen integriren läßt, so bekommt man das verlangete Integral in endlichen Ausdrücken. Es sei zu integriren

$$x^n\,dx\,lx$$

Hier ist $p = x^n$, und $q = x$, folglich V oder $\int p\,dx = \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ und $\int\frac{V\,dq}{q} = \int\frac{x^n\,dx}{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$.

Daher ist

$$\int x^n\,dx\,lx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\,lx - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(lx - \frac{1}{n+1}\right) + c$$

In dem Falle, wo $n = -1$, wird $x^n dx\,lx = \frac{dx\,lx}{x}$ und dann wird die Summe aus der 20sten Formel des 4ten Paragraphs $\frac{1}{2}(lx)^2 + c$.

Zusatz.

Zusatz. Zur gegenwärtigen Aufgabe gehören noch einige andere Formeln des 4ten Paragraphs, nämlich von der 17ten bis zur 22ten, welche wir hier erläutern wollen.

Es sei zu differenziren $\mathrm{l}\,\mathrm{l}\,x$, so setze man anfänglich $\mathrm{l}\,x = z$, folglich $\mathrm{l}\,\mathrm{l}\,x = \mathrm{l}\,z$, und $\mathrm{d}\,\mathrm{l}\,\mathrm{l}\,x = \mathrm{d}\,\mathrm{l}\,z = \frac{\mathrm{d}\,z}{z}$.

Weil nun $z = \mathrm{l}\,x$, so ist $\mathrm{d}\,z = \frac{\mathrm{d}\,x}{x}$, setzet man diesen Werth von $\mathrm{d}\,z$ in die Gleichung

$$\mathrm{d}\,\mathrm{l}\,z = \frac{\mathrm{d}\,z}{z}$$

$$\text{so ist} \quad \mathrm{d}\,\mathrm{l}\,z = \frac{\mathrm{d}\,x}{x\,z}$$

und weil $z = \mathrm{l}\,x$, so wird

$$\mathrm{d}\,\mathrm{l}\,\mathrm{l}\,x = \frac{\mathrm{d}\,x}{x\,\mathrm{l}\,x}$$

$$\text{folglich ist} \quad \mathrm{l}\,\mathrm{l}\,x = \int \frac{\mathrm{d}\,x}{x\,\mathrm{l}\,x}$$

Es sei zu differenziren $\mathrm{l}\,\mathrm{l}\,\mathrm{l}\,x$, so setze man $\mathrm{l}\,\mathrm{l}\,x = z$, folglich ist

$$\mathrm{l}\,\mathrm{l}\,\mathrm{l}\,x = \mathrm{l}\,z$$

$$\mathrm{d}\,\mathrm{l}\,\mathrm{l}\,\mathrm{l}\,x = \frac{\mathrm{d}\,z}{z}$$

Weil aber $\mathrm{d}\,z = \mathrm{l}\,\mathrm{l}\,x$, so ist, aus vorigem Beweise $\mathrm{d}\,z = \frac{\mathrm{d}\,x}{x\,\mathrm{l}\,x}$, folglich

$$\mathrm{d}\,\mathrm{l}\,\mathrm{l}\,\mathrm{l}\,x = \frac{\mathrm{d}\,z}{z} = \frac{\mathrm{d}\,x}{x\,\mathrm{l}\,x.z} = \frac{\mathrm{d}\,x}{x\,\mathrm{l}\,x\,\mathrm{l}\,\mathrm{l}\,x}$$

folglich $\mathrm{l}\,\mathrm{l}\,\mathrm{l}\,x = \int \frac{\mathrm{d}\,x}{x\,\mathrm{l}\,x\,\mathrm{l}\,\mathrm{l}\,x}$

Wenn

Wenn man so fortfähret, so wird man die allgemeine Regel wahrnehmen, welche in der 19ten Formel des 4ten Paragraphs enthalten ist.

Es sei zu differenziren $(lx)^n$, so setze man $lx = z$, folglich

$$(lx)^n = z^n$$
$$\partial(lx)^n = nz^{n-1}\partial z$$

Weil nun $z = lx =$ so ist $\partial z = \frac{\partial x}{x}$, folglich wird

$$\partial(lx)^n = \frac{n(lx)^{n-1}\partial x}{x}$$

$$\text{folglich } (lx)^n = n\int\frac{\partial x(lx)^{n-1}}{x}$$

$$\frac{(lx)^n}{n} = \int\frac{\partial x(lx)^{n-1}}{x}$$

Es sei $n-1 = m$, so wird $n = m+1$, und

$$\frac{(lx)^{m+1}}{m+1} = \int\frac{\partial x(lx)^m}{x}$$

Es sei ferner zu differenziren $(llx)^n$, so setze man $llx = z$, folglich

$$(llx)^n = z^n$$
$$\partial(llx)^n = nz^{n-1}\partial z$$

Weil aber $z = llx$, so ist, vermöge der obigen Beweise $\partial z = \frac{\partial x}{x\,lx}$, und es wird

$$\partial(llx)^n = \frac{n(llx)^{n-1}\partial x}{x\,lx}$$

$$\text{folglich } (llx)^n = n\int\frac{(llx)^{n-1}\partial x}{x\,lx}$$

$$\text{oder } (llx)^n = \int\frac{\partial x(llx)^{n-1}}{x\,lx}$$

Es

Es sei $n-1=m$, so ist $n=m+1$, und

$$\frac{(lx)^{m+1}}{m+1}=\int\frac{dx(lx)^m}{xlx}$$

Wenn man so weiter gehet, so wird man die Regel wahrnehmen, die in der 22ten Formel enthalten ist.

§. 7.

Aufgabe.

Eine Exponential-Funkzion von x integriren.

Auflösung. Eine Exponenzialgröße kann allemal in eine unendliche Reihe verwandelt werden, und dann läßt sich jeder Satz für sich integriren.

1) Es sei gegeben zu integriren $x^x dx$, so nehme man an $x=1+y$, welches giebet $dx=dy$, und folglich

$$x^x dx=(1+y)^{1+x}dy$$

Es sei ferner $(1+y)^{1+y}=1+v$

so ist $(1+y)l(1+y)=l(1+v)$

man entwickele nun $l(1+y)$ und $l(1+v)$ wie im XVIII. Hauptstücke §. 9 gelehret worden, so kommt

$$y+\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{6}+\frac{y^4}{12}-\&c.=v-\frac{v^2}{2}+\frac{v^3}{3}-\frac{v^4}{4}+\&c.$$

Man nehme nun an, es sei

$$v=Ay+By^2+Cy^3+Dy^4+\&c.$$

man setze diese Reihe und deren Potenzen in die lezte Gleichung anstatt y und dessen Potenzen, man vergleiche die Koeffizienten, so wird man finden

$$A=1$$
$$B=1$$
$$C=\tfrac{1}{2}$$
$$D=\tfrac{1}{3}$$
$$\&c.\quad\&c.$$

Folglich wird

$$v = y + y^2 + \tfrac{1}{2}y^3 + \tfrac{1}{3}y^4 + \&c.$$

$$(1+y)^{1+v} = 1 + v = 1 + y + y^2 + \tfrac{1}{2}y^3 + \tfrac{1}{3}y^4 + \&c.$$

$$(1+y)^{1+v}\,dy = dy + y\,dy + y^2\,dy + \tfrac{1}{2}y^3\,dy + \tfrac{1}{3}y^4\,dy + \&c.$$

und wenn man alle Glieder integriret

$$\int (1+y)^{1+v}\,dy = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{8} + \frac{y^5}{15} + \&c.$$

Es ist aber $1 + y = x$, folglich $y = x - 1$, und $dy = dx$, folglich

$$\int x^x\,dx = (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{(x-1)^4}{8} + \frac{(x-1)^5}{15} + \&c.\ldots + c$$

und also ist das verlangete Integral durch eine unendliche Reihe ausgedrucket. Wenn $x - 1$ eine kleine Größe ist, so nehmen die Glieder schnell ab, und die lezten können ohne Gefahr weggelassen werden.

II. Es sei zu integriren $e^x\,dx$, so bekommt man

$$\int e^x\,dx = e^x + c = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \&c.\ldots + c$$

Man kann auch, bevor man integriret, das e^x entwickeln, und dann wird

$$e^x\,dx = dx + x\,dx + \frac{x^2\,dx}{1.2} + \frac{x^3\,dx}{1.2.3} + \&c.$$

$$\int e^x\,dx = x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \&c. + c$$

Hier fehlet 1 womit die Reihe anfangen soll. Diese 1 ist aber in der beständigen Größe c mit inbegriffen.

Wenn das e^x noch durch eine andere Funkzion von x multipliziret oder dividiret ist, so muß alles vor der Integrazion

grazion entwickelt werden. Es sei zu integriren $e^x x^n dx$, so ist

$$e^x x^n = x^n + x^{n+1} + \frac{x^{n+2}}{1.2} + \frac{x^{n+3}}{1.2.3} + \&c.$$

$$e^x x^n dx = x^n dx + x^{n+1} dx + \frac{x^{n+2} dx}{1.2} + \frac{x^{n+3} dx}{1.2.3}$$

daher

$$\int e^x x^n dx = c + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+2}}{n+2} + \frac{x^{n+3}}{1.2(n+3)} + \frac{x^{n+4}}{1.2.3(n+4)} + \&c.$$

Es sei verlanget $\int e^{a+x} dx$, so ist dieses $= \int e^a e^x dx = e^a \int e^x dx = e^a e^x + c = e^{a+x} + c$.

Es sei verlanget $\int e^{ax} dx$, so nehme man an $ax = z$, folglich $a dx = dz$, $dx = \frac{dz}{a}$, und $\int e^{ax} dx = \int \frac{e^z dz}{a}$

$$= \frac{e^z}{a} + c = \frac{e^{ax}}{a} + c$$

III. $\int a^x dx = \frac{a^x}{la} + c$, denn man nehme an

$$\begin{aligned} a^x &= z \\ \text{so wird } x la &= lz \\ dx la &= \frac{dz}{z} \\ z dx la &= dz \\ a^x dx la &= d(a^x) \\ la^x dx &= \frac{d(a^x)}{la} \\ \int a^x dx &= \frac{a^x}{la} \end{aligned}$$

Es ist aber

$$a^x = 1 + x\,la + \frac{x^2(la)^2}{1.2} + \frac{x^3(la)^3}{1.2.3}$$

$$\text{folgl. } \int a^x dx = \frac{a^x}{la} + c = \frac{1}{la} + x + \frac{x^2 la}{1.2} + \frac{x^3(la)^2}{1.2.3} + \&c. + c$$

Entwickelt man a^x vor der Integrazion, so ist

$$a^x dx = dx + x\,la\,dx + \frac{x^2(la^2)dx}{1.2} + \frac{x^3(la)^3 dx}{1.2.3} + \&c.$$

$$\int a^x dx = x + \frac{x^2 la}{1.2} + \frac{x^3(la)^2}{1.2.3} + \frac{x^4(la)^3}{1.2.3} + \&c. + c$$

In dieser Reihe fehlet $\frac{1}{la}$ welches aber in der beständigen Größe c mit begriffen ist.

Es sei verlanget $\int x^n a^{(x^r)} dx$. Man nehme an $x^r = z$, so ist $x = z^{\frac{1}{r}}$, $x^n = z^{\frac{n}{r}}$, $dx = \frac{1}{r} z^{\frac{1}{r}-1} dz$

$$\text{folglich } \int x^n a^{(x^r)} dx = \int z^{\frac{n}{r}} a^z \frac{1}{r} z^{\frac{1}{r}-1} dz$$

$$= \frac{1}{r} \int z^{\frac{n+1}{r}-1} a^z dz$$

Man entwickele a^z, und multiplizire mit $z^{\frac{n+1}{r}-1} dz$, so werden sich die Glieder jedes für sich integriren lassen, und man braucht nur zulezt wiederum x^r anstatt z zu schreiben. Oder man entwickele sogleich $a^{(x^r)}$, so ist

$$a^{(x^r)} = 1 + x^r la + \frac{x^{2r}(la)^2}{1.2} + \frac{x^{3r}(la)^3}{1.2.3} + \&c.$$

$$x^n a^{(x^r)} dx = x^n dx + x^{r+n} dx\,la + \frac{x^{2r+n} dx}{1.2} + \&c.$$

$$\text{folgl. } \int x^n a^{(x^r)} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{r+n+1} la}{r+n+1} + \frac{x^{2r+n+1}(la)^2}{1.2.(2r+n+1)} + \&c. + c$$

Wir

Wir wollen die Beispiele nicht anhäufen. Man siehet das alles entweder auf eine geschickte Einschiebung neuer veränderlichen Größen und auf die Entwickelung der Exponenzialgrößen ankommt.

§. 8.

Aufgabe.

Eine Funkzion von x integriren, worin Kreisgrößen vorkommen.

Auflösung. Die Kreisgrößen stellen eigentlich unendliche Reihen vor (XIX Hauptst. §. 2). Sie können folglich allemal wieder in unendliche Reihen verwandelt werden, und dann lassen sich die Glieder jedes für sich integriren. Jedoch giebt es manche Fälle, wo die Integrazion durch endliche Größen geschehen kann. Dergleichen sind die Formeln 25, 26, 27, 28, 29, 30 im 4ten Paragraph. Wir wollen noch einen Fall anführen.

Es sei zu integriren $p\,\mathrm{d}x\,\mathfrak{AS}x$, wo p eine algebraische Funkzion von x vorstellet. Man bekommt anfänglich, vermittelst einer solchen Veränderung, wie im §. 6. geschehen

$$\int p\,\mathrm{d}x\,\mathfrak{AS}x = \mathfrak{AS}x\int p\,\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}\mathfrak{AS}x \int p\,\mathrm{d}x$$

oder wenn wir annehmen $\int p\,\mathrm{d}x = \mathrm{V}$, so wird

$$\int p\,\mathrm{d}x\,\mathfrak{AS}x = \mathrm{V}\,\mathfrak{AS}x - \int \mathrm{V}\,\mathrm{d}\mathfrak{AS}x$$

und weil $\mathrm{d}\mathfrak{AS}x = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)}}$, so ist

$$\int p\,\mathrm{d}x\,\mathfrak{AS}x = \mathrm{V}\,\mathfrak{AS}x - \int \frac{\mathrm{V}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

Trift es sich nun, daß $\frac{\mathrm{V}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)}}$ durch einen endlichen Ausdruck integriret werden kann, so braucht man keine unendliche Reihen.

Durch ähnliche Folgerungen findet man

$$\int p\,dx\,\mathfrak{AS}'x = V\mathfrak{AS}'x + \int \frac{V\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$\int p\,dx\,\mathfrak{AT}x = V\mathfrak{AT}x - \int \frac{V\,dx}{1+x^2}$$

&c. &c.

Das V stellet in diesen Formeln allemal $\int p\,dx$ vor.

§. 9.

Aufgabe.

Eine Differenzialgleichung von der ersten Ordnung und von zwei veränderlichen Größen integriren.

Auflösung. Es seien die zwei veränderlichen Größen x und y. Man setze, es sei $y = ux$, so wird die gegebene Gleichung, wenn sie gleichartig ist, sich so verwandeln, daß man in einem Hauptgliede $\frac{dx}{x}$ und in dem andern eine Funkzion von u bekommt, und alsdenn kann man beiderseits nach vorhergehenden Regeln integriren.

Beispiel. Es sei

$$(x^2 + xy)\,dy = y^2\,dx$$

oder

$$dy = \frac{y^2}{x^2+xy}\,dx.$$

Man nehme an $y = ux$, so ist $dy = u\,dx + x\,du$, und es wird

$$u\,dx + x\,du = \frac{u^2x^2}{x^2+ux^2}\,dx$$

oder

$$u\,dx + x\,du = \frac{u^2}{1+u}\,dx$$

oder

oder $\left(u - \frac{u^2}{1+u}\right) dx = -x\,du$

oder $\frac{u}{1+u}\,dx = -x\,du$

daher $\frac{dx}{x} = \frac{-(1+u)\,du}{u}$

oder $\frac{dx}{x} = -\frac{du}{u} - du$

daher $lx = -lu - u$

oder weil $u = \frac{y}{x}$, so ist

$lx = -l\frac{y}{x} - \frac{y}{x}$

und weil $l\frac{y}{x} = ly - lx$, so ist

$lx = -ly + lx - \frac{y}{x}$

$0 = -ly - \frac{y}{x}$

$xly = -y$

$x = -\frac{y}{ly} + c$

Und dieses ist die verlangte Integralgleichung. Man versuche dieselbe zu differenziren, so wird das Gegebene, nämlich $(x^2 + xy)\,dy = y^2\,dx$, wieder herauskommen.

Eine andere Auflösung. Man bringe in der gegebenen Gleichung alles auf eine Seite, so daß die Gleichung vernichtet sei. Man versuche, ob das geltende

Glied ein richtiges Differenzial ausmachet, oder ob $\frac{M}{dx} = \frac{N}{dy}$, wenn nämlich gegeben ist $Mdy + Ndx = 0$ (Siehe XVI Hauptst. §. 30). Findet es sich, daß das Differenzial richtig ist, so integrire man anfänglich in Betrachtung der einen veränderlichen Größe y allein, und nehme an, das verlangte Integral sei dem gefundenen gleich, wenn man noch eine Funkzion X von x hinzuthut. Drucket man nun diese Voraussetzung durch eine Gleichung aus, und differenziret man dieselbe, so wird sich die Funkzion X bestimmen lassen.

Beispiel I. Es sei zu integriren

$$2y^2dx + 4xydy + 9y^2dy + 3x^2dx = 0$$
oder $$(4xy + 9y^2)dy + (2y^2 + 3x^2)dx = 0$$

Um zu erfahren, ob man ein richtiges Differenzial vor sich hat, so differenzire man $4xy + 9y^2$ in Betrachtung des x, und $2y^2 + 3x^2$ in Betrachtung des y, so kommt $4ydx$ und $4ydy$. Folglich ist das Differenzial richtig. Nun integrire man $(4xy + 9y^2)dy + (2y^2 + 3x^2)dx$ in Betrachtung des y allein, das ist, man integrire nur $4xydy + 9y^2dy$, als wenn x beständig wäre, so kommt $2xy^2 + 3y^3$. Man nehme an, es fehle noch X zum völligen Integrale, so ist

$$\int(4xy + 9y^2)dy + \int(2y^2 + 3x^2)dx = 2xy^2 + 3y^3 + X$$

Man differenzire, so kommt

$$4xydy + 9y^2dy + 2y^2dx + 3x^2dx = 2y^2dx + 4xydy + 9y^2dy + dX$$

daher wird $3x^2dx = dX$

folglich $x^3 = X$

Also wird das gehörige Integral

$$2xy^2 + 3y^3 + x^3 + c = 0$$

Bei-

Beispiel II. Es sei gegeben

$$x\,dy+y\,dx=0$$

Integriret man für y allein, so kommt xy. Man setze also

$$\int(x\,dy+y\,dx)=xy+X$$

Man differenzire, so wird

$$x\,dy+y\,dx=x\,dy+y\,dx+dX$$

folglich $0=dX$

folglich $a=X$

das heißt, X muß eine beständige Größe sein, weil dessen Differenzial 0 ist. Es ist also die Integralgleichung

$$xy+a=0$$

Beispiel III. Es sei

$$\frac{dx}{y}-\frac{x\,dy}{y^2}=0$$

so wird, wenn man für x allein integrirt $\int\frac{dx}{y}=\frac{x}{y}$.

Man setze

$$\int\left(\frac{dx}{y}-\frac{x\,dy}{y^2}\right)=\frac{x}{y}+Y$$

man differenzire, so ist

$$\frac{dx}{y}-\frac{x\,dy}{y^2}=\frac{dx}{y}-\frac{x\,dy}{y^2}+dY$$

also ist $dY=0$ und $Y=a$

folglich ist die verlangte Gleichung

$$\frac{x}{y}+a=0$$

Zusatz. Beide hier angeführte Methoden haben ihren Nutzen. Die erste heißt die Integrazion durch Absonderung der veränderlichen Größen (séparation des variables) und kann nur gebrauchet werden, wenn die Funkzion gleichartig ist. Die zweite heißt die Integrazion richtiger Differenziale (intégration des différencielles exactes), und kann nur gebraucht werden, wenn nichts in der Gleichung fehlet, was zum richtigen Differenziale gehöret. Aus beiden folgenden Aufgaben wird man ersehen, wie man sich behelfen kann, wenn die erforderlichen Bedingungen für beide Methoden nicht eintreffen.

§. 10.

Aufgabe.

Eine ungleichartige Funkzion von x und y in eine gleichartige verwandeln, wenn es angehet.

Auflösung. Man setze in der gegebenen Gleichung $y = u^s$, und suche hernach das s so zu bestimmen, daß die Koeffizienten der veränderlichen Größen in allen Gliedern eine gleiche Summe ausmachen.

Beispiel. Es sei gegeben

$$(ay^2x^2 + b + cxy)\mathrm{d}x = fx^4y^2\mathrm{d}y$$

Es sei nun $y = u^s$, so wird

$$(ax^2u^{2s} + b + cxu^s)\mathrm{d}x = fx^4u^{2s}\mathrm{d}(u^s)$$

oder weil $\mathrm{d}(u^s) = su^{s-1}\mathrm{d}u$

$$(ax^2u^{2s} + bx^0u^0 + cx^1u^s)\mathrm{d}x = sfx^4u^{3s-1}\mathrm{d}u$$

Soll diese Gleichung gleichartig sein, so müssen alle Glieder gleich viel veränderliche Dimensionen enthalten. Folglich muß in allen Gliedern die Summe der Exponenten bei den veränderlichen Größen gleich sein. Es muß also sein

$$2 + 2s = 0 + 0 = 1 + s = 4 + 3s - 1$$

Man

Man hat also erstlich

$$2+2s=0$$

daher $$1+s=0$$

$$s=-1$$

Man versuche, ob alle vorige Hülfsgleichungen in der That eintreffen, wenn man annimmt $s=-1$. In diesem Falle wird $2+2s=0$, ferner $0+0=0$, $1+s=0$, $4+3s-1=0$. Also ist wirklich

$$2+2s=0+0=1+s=4+3s-2$$

Und die Funktion wird gleichartig, wenn $s=-1$, und $y=u^s=u^{-1}$. Setzet man also in die gegebene Gleichung u^{-1} anstatt y, so bekommt man

$$(ax^2u^{-2}+b+cxu^{-1})dx=-fx^4u^{-4}du$$

und dieses ist eine gleichartige Gleichung von 0 veränderlichen Ausmessungen. Multiplizirt man beiderseits mit u^4, um die verneinten Exponenten wegzuschaffen, so wird

$$(ax^2u^2+bu^4+cxu^3)dx=-fx^4du$$

Dieses ist nun eine gleichartige Gleichung von 4 Ausmessungen zwischen x und u. In derselben können die veränderlichen Größen abgesondert werden, um das Integral zu erlangen.

§. 11.

Aufgabe.

Einen bequemen Faktor finden, vermittelst dessen eine Gleichung wie $Mdy+Ndx=0$, ein richtiges Differenzial werden kann, wenn sie es nicht ist.

Auflösung. Es sei $Mdy+Ndx=0$, und das erste Hauptglied sei ein richtiges Differenzial. Dividiret man durch M, so bekommt man

$$dy+\frac{N}{M}dx=0$$

und

und wenn N und M einen gemeinschaftlichen Faktor haben, so verschwindet derselbe. Gesetzt, es werde dadurch $\frac{N}{M} = m$, so bekommt die Gleichung folgende Gestalt

$$\partial y + m\partial x = 0$$

Es kommt nun darauf an, den gemeinschaftlichen Faktor wieder zu finden, wodurch die Gleichung multipliziret werden muß, damit sie ein richtiges Differenzial enthalte. Es sei dieser Faktor $= P$. Wir setzen voraus, daß die Gleichung gleichartig war, und daß auch P eine gleichartige Funkzion des x und des y von λ Ausmessungen sei. Multipliziret man durch diesen Faktor, so kommt

$$P\partial y + Pm\partial x = 0$$

Weil P und Pm von λ Ausmessungen sind, so ist das Differenzial $P\partial y + Pm\partial x$ aus einer gleichartigen Funkzion von x und y entstanden, welche $\lambda + 1$ Ausmessungen hat. Es sei diese Funkzion ζ, so ist

$$Py + Pmx = (\lambda + 1)\zeta$$

wie am gehörigen Orte (XVI. Hauptst. §. 33) bewiesen worden. Nun dividire man

$$P\partial y + Pm\partial x = \partial\zeta$$

durch $\quad Py + Pmx = (\lambda + 1)\zeta$

so kommt $\quad \frac{\partial y + m\partial x}{y + mx} = \frac{\partial\zeta}{(\lambda + 1)\zeta}$

Daraus siehet man, daß $\frac{\partial y + m\partial x}{y + mx}$ ein richtiges Differenzial ist, und daß $\frac{1}{y + mx}$ ein solcher Faktor ist, wie man ihn verlanget hat.

Eine

Eine andere Auflösung. Es sei gegeben die Gleichung

$$dy + Pydx = Qdx,$$

wo P und Q Funkzionen von x und beständigen Größen vorstellen. Gesetzt, es sei X der Faktor, wodurch $dy + Pydx$ ein richtiges Differenzial werden kann. Weil nun Q keine andere veränderliche Größe enthält als x, so wird der Faktor X auch bloß eine Funkzion von x und beständigen Größen sein. Multiplizirt man $dy + Pydx$ mit X, so kommt

$$Xdy + PXydx$$

Soll nun dieses ein richtiges Differenzial sein, so muß sein

$$\frac{dX}{dx} = \frac{d(PXy)}{dy}$$

nämlich in dem Verstande, daß X in Betrachtung des x und PXy in Betrachtung des y allein differenziret wird (XVI. Hauptst. §. 30). Weil aber P und X Funkzionen von x allein sind, so ist in Betrachtung des y allein

$d(PXy) = PXdy$, folglich $\frac{d(PXy)}{dy} = \frac{PXdy}{dy} = PX.$

Also wird $\frac{dX}{dx} = PX$

Weil hier X eine Funkzion von x allein ist, so ist dX nicht bloß ein theilhaftes Differenzial, sondern das richtige Differenzial von X. Folglich kann die letzte Gleichung, wie gewöhnlich, behandelt werden, und es wird

$$dX = PXdx$$

$$\frac{dX}{X} = Pdx$$

daher $lX = \int Pdx$

oder $X = e^{\int Pdx}$

Dieses

Dieſes iſt alſo der verlangte Faktor. Man multiplizire damit die gegebene Gleichung, ſo wird

$$e^{\int P dx} dy + e^{\int P dx} P y dx = e^{\int P dx} Q dx$$

Man integrire das erſte Glied der Gleichung anfänglich in Betrachtung des y allein, ſo kommt $e^{\int P dx} y$. Nun ſetze man

$$\int (e^{\int P dx} dy + e^{\int P dx} P y dx) = e^{\int P dx} y + S$$

Man differenzire, ſo kommt

$$e^{\int P dx} dy + e^{\int P dx} P y dx = e^{\int P dx} dy + e^{\int P dx} P y dx + dS$$

folglich iſt $dS = 0$, und $S = a$. Alſo wird die Integralgleichung ſein

$$e^{\int P dx} y + a = \int e^{\int P dx} Q dx$$

oder

$$e^{\int P dx} y = a + \int e^{\int P dx} Q dx$$

daher

$$y = e^{-\int P dx} (a + \int e^{\int P dx} Q dx)$$

Es bleibt alſo nur übrig in jedem Falle anſtatt P und Q die Funkzionen zu ſetzen, welche durch dieſe Buchſtaben vorgeſtellet werden.

Zuſatz. Es ſei eine Differenzialgleichung unter dieſer Geſtalt gegeben

$$A y + B \frac{dy}{dx} = X$$

ſo iſt

$$A y dx + B dy = X dx$$

oder

$$B dy + A y dx = X dx$$

oder

$$dy + \frac{A}{B} y dx = \frac{X}{B} dx$$

wo A, B und X Funkzionen von x vorſtellen, ſo wird vermittelſt voriger Formel ſein

$$y = e^{-\int \frac{A}{B} dx} \left(a + \int e^{\int \frac{A}{B} dx} \cdot \frac{X}{B} dx \right)$$

§. 12.

§. 12.

Aufgabe.

Die veränderlichen Größen in einer gleichartigen Differenzial-Gleichung von der zweiten Ordnung abſondern.

Auflöſung. Es ſei

$$V = o$$

eine gleichartige Differenzial-Gleichung, zwiſchen y, x, p oder $\frac{dy}{dx}$, und q oder $\frac{dp}{dx}$, ſo daß in allen Gliedern die Summe der Exponenten der veränderlichen Größen x, y, p, und q allemal gleich ſei. Man nehme an $y = ux$, und $q = \frac{z}{x}$, ſo wird eine neue Gleichung entſtehen zwiſchen z, u und p, welche wir bezeichnen wollen durch

$$V' = o$$

Weil nun $\frac{dy}{dx} = p$, ſo iſt $dy = pdx$, und weil $y = ux$, ſo iſt $dy = udx + xdu$, daher iſt $pdx = udx + xdu$ oder $(p - u)dx = xdu$ oder $\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u}$. Ferner, weil $\frac{dp}{dx} = q$, ſo iſt $dp = qdx$; und weil $q = \frac{z}{x}$, ſo iſt $dp = \frac{zdx}{x}$, folglich $\frac{dp}{z} = \frac{dx}{x}$. Setzen wir dieſen Werth in die eben gefundene Gleichung $\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u}$, ſo kommt $\frac{dp}{z} = \frac{du}{p-u}$. Vermittelſt dieſer letzten Gleichung und der Gleichung $V' = o$, muß man verſuchen eine Gleichung von der erſten Differenzial-Ordnung zwiſchen p und u zu finden,

und

Dieſes iſt alſo der verlangte Faktor. Man multiplizire damit die gegebene Gleichung, ſo wird

$$e^{\int P dx} dy + e^{\int P dx} P y dx = e^{\int P dx} Q dx$$

Man integrire das erſte Glied der Gleichung anfänglich in Betrachtung des y allein, ſo kommt $e^{\int P dx} y$. Nun ſetze man

$$\int (e^{\int P dx} dy + e^{\int P dx} P y dx) = e^{\int P dx} y + S$$

Man differenzire, ſo kommt

$$e^{\int P dx} dy + e^{\int P dx} P y dx = e^{\int P dx} dy + e^{\int P dx} P y dx + dS$$

folglich iſt $dS = 0$, und $S = a$. Alſo wird die Integralgleichung ſein

$$e^{\int P dx} y + a = \int e^{\int P dx} Q dx$$

oder $$e^{\int P dx} y = a + \int e^{\int P dx} Q dx$$

daher $$y = e^{-\int P dx} (a + \int e^{\int P dx} Q dx)$$

Es bleibt alſo nur übrig in jedem Falle anſtatt P und Q die Funkzionen zu ſetzen, welche durch dieſe Buchſtaben vorgeſtellet werden.

Zuſatz. Es ſei eine Differenzialgleichung unter dieſer Geſtalt gegeben

$$A y + B \frac{dy}{dx} = X$$

ſo iſt $$A y dx + B dy = X dx$$

oder $$B dy + A y dx = X dx$$

oder $$dy + \frac{A}{B} y dx = \frac{X}{B} dx$$

wo A, B und X Funkzionen von x vorſtellen, ſo wird vermittelſt voriger Formel ſein

$$y = e^{-\int \frac{A}{B} dx} \left(a + \int e^{\int \frac{A}{B} dx} \cdot \frac{X}{B} dx \right)$$

§. 12.

§. 12.

Aufgabe.

Die veränderlichen Größen in einer gleichartigen Differenzial-Gleichung von der zweiten Ordnung abſondern.

Auflöſung. Es ſei

$$V = o$$

eine gleichartige Differenzial-Gleichung, zwiſchen y, x, p oder $\frac{dy}{dx}$, und q oder $\frac{dp}{dx}$, ſo daß in allen Gliedern die Summe der Exponenten der veränderlichen Größen x, y, p, und q allemal gleich ſei. Man nehme an $y = ux$, und $q = \frac{z}{x}$, ſo wird eine neue Gleichung entſtehen zwiſchen z, u und p, welche wir bezeichnen wollen durch

$$V' = o$$

Weil nun $\frac{dy}{dx} = p$, ſo iſt $dy = pdx$, und weil $y = ux$, ſo iſt $dy = udx + xdu$, daher iſt $pdx = udx + xdu$ oder $(p - u)dx = xdu$ oder $\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u}$. Ferner, weil $\frac{dp}{dx} = q$, ſo iſt $dp = qdx$; und weil $q = \frac{z}{x}$, ſo iſt $dp = \frac{zdx}{x}$, folglich $\frac{dp}{z} = \frac{dx}{x}$. Setzen wir dieſen Werth in die eben gefundene Gleichung $\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u}$, ſo kommt $\frac{dp}{z} = \frac{du}{p-u}$. Vermittelſt dieſer letzten Gleichung und der Gleichung $V' = o$, muß man verſuchen eine Gleichung von der erſten Differenzial-Ordnung zwiſchen p und u zu finden, und

und daraus den Werth des p in einer Funkzion von u erforschen. Wenn dieses geschehen, so kann man

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{p - u}$$

integriren, und also bekommt man zuletzt den Werth des x durch eine Funkzion des u ausgedrucket, folglich auch den Werth des y in einer Funkzion des u, weil $y = ux$.

Beispiel. Es sei gegeben zu integriren

$$x^2 \partial^2 y + x \partial x \partial y = ny \partial x^2,$$

wo ∂x beständig ist, oder, wenn man alles durch ∂x^2 dividiret

$$x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x \frac{\partial y}{\partial x} = ny$$

$$\text{oder} \quad x^2 q + xp = ny$$

Nun nehme man an, wie vorgeschrieben worden, $y = ux$ und $q = \frac{z}{x}$ oder $qx = z$, so bekommt man

$$zx + px = nux$$

$$\text{oder} \quad z + p = nu$$

Dieses ist die Gleichung zwischen z, u und p, die wir angedeutet haben durch $V' = 0$, sie giebt

$$z = nu - p$$

Wird nun dieser Werth des z in der Formel

$$\frac{\partial p}{z} = \frac{\partial u}{p - u}$$

angebracht, so wird

$$\frac{\partial p}{nu - p} = \frac{\partial u}{p - u} \text{ oder } (p - u)\partial p = (nu - p)\partial u$$

Diese letzte Gleichung ist gleichartig, von der ersten Ordnung, und enthält nur zwei veränderliche Größen. Sie kann

also nach §. 9 integriret werden, und so bekommt man den Werth des p in einer Funkzion von u. Wenn dieses geschehen, so setze man den gefundenen Werth des p in die Gleichung

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u}$$

so bekommt man eine Gleichung, welche leicht zu integriren ist, und den Werth von lx in einer endlichen oder unendlichen Funkzion von u oder $\frac{y}{x}$ giebet.

§. 13.

Aufgabe.

Die veränderlichen Größen absondern, in einer ungleichartigen Gleichung von der zweiten Ordnung.

Auflösung. Es sei gegeben eine ungleichartige Gleichung zwischen x, y, p oder $\frac{dy}{dx}$, und q oder $\frac{dp}{dx}$. Man nehme an, es sei $y = ux^n$, $p = tx^{n-1}$, $q = zx^{n-2}$. Man versuche, ob für u ein Werth zu finden ist, wodurch die Größe x gänzlich aus der Gleichung verschwinde. Dieses vorausgesetzet, wird es nicht schwer sein, die gegebene Gleichung auf eine andere von der ersten Ordnung zurück zu führen, wie man es aus folgendem Beispiele ersehen wird.

Beispiel. Es sei gegeben diese Gleichung

$$x^4\frac{d^2y}{dx^2} = (x^3 - 2xy)\frac{dy}{dx} - 4y^2$$

worinn dx beständig ist, oder

$$x^4q = p(x^3 + 2xy) - 4y^2$$

Es sei nun $q = \zeta x^{n-2}$, $p = tx^{n-1}$, $y = ux^n$, so bekommt man

$$x^{n+2}\zeta = tx^{n+2} + x^{2n}(2tu - 4u^2)$$

Man siehet, daß x aus der Gleichung verschwinden wird, wenn man annimmt

$$n + 2 = 2n \text{ oder } n = 2$$

Ist also $n = 2$, so wird unsere Gleichung

$$\zeta = t + 2tu - 4u^2$$

Und weil angenommen worden

$y = ux^n$ so wird $y = ux^2$
$p = tx^{n-1}$ so wird $p = tx$
$q = \zeta x^{n-2}$ so wird $q = \zeta$

Aus $y = ux^2$ folget

$$dy = 2uxdx + x^2du$$

es ist aber $dy = pdx$, also

$$pdx = 2uxdx + x^2du$$

$$\frac{p}{x}dx = 2udx + xdu$$

und weil $\frac{p}{x} = t$, so ist

$$tdx = 2udx + xdu \text{ oder } (t - 2u)dx = xdu$$

Ferner, weil $p = tx$, so ist

$$dp = tdx + xdt$$

es ist aber $dp = qdx = \zeta dx$, also ist
$\zeta dx = tdx + xdt$ oder $(\zeta - t)dx = xdt$

Aus den beiden Gleichungen $(t - 2u)dx = xdu$ und $(\zeta - t)dx = xdt$, ziehet man

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{r - 2u}$$

und

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{\zeta - t}$$

Also

Also ist

$$\frac{du}{t-2u} = \frac{dt}{z-t}$$

oder $(z-t)du = (t-2u)dt$

oder weil $z = t+2tu-4u^2$

$(2tu-4u^2)du = (t-2u)dt$

$(t-2u)2udu = (t-2u)dt$

folglich $2udu = dt$

folglich $u^2+c = t$

Man setze den gefundenen Werth des t, nämlich u^2+c in die Gleichung $\frac{dx}{x} = \frac{du}{t-2u}$, so bekommt man

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{u^2-2u+c}$$

Nun kommt es beim Integriren darauf an, ob $c = 1$, oder $c < 1$ oder $c > 1$ sein soll. Im ersten Falle, nämlich wenn $c = 1$, hat man

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{u^2-2u+1} = \frac{du}{(u-1)^2} = (u-1)^{-2}du$$

folglich wird das Integral, vermöge der 4ten Formel im §. 4.

$$l\frac{x}{e'} = \frac{(u-1)^{-2+1}}{-2+1} = \frac{(u-1)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{u-1} = \frac{1}{1-u}$$

oder weil $u = \frac{y}{x^2}$

$$1°)\ l\frac{x}{e'} = \frac{1}{1-\frac{y}{x^2}} = \frac{x^2}{x^2-y}$$

Soll aber $c < 1$ sein, so kann man also schreiben

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{(u-1)^2-(1-c)}$$

und dann wird das Integral

$$l\frac{x}{c'} = \frac{-1}{2\sqrt{(1-c)}}\, l\frac{u-1+\sqrt{(1-c)}}{u-1-\sqrt{(1-c)}}$$

Mann kann sich bei dieser Gelegenheit überhaupt diese Formel merken

$$\int \frac{dz}{(z+a)^2-b^2} = \frac{-1}{2b} \cdot l\frac{(z+a)+b}{(z+a)-b}$$

welche sich leicht durch die Differenziazion beweisen läßt. Setzet man in dem gefundenen Integrale für u dessen Werth $\frac{y}{x^2}$, so kommt

$$l\frac{x}{c'} = \frac{-1}{2\sqrt{(1-c)}}\, l\frac{\frac{y}{x^2}-1+\sqrt{(1-c)}}{\frac{y}{x^2}-1-\sqrt{(1-c)}}$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{(1-c)}}\, l\frac{y-x^2+x^2\sqrt{(1-c)}}{y-x^2-x^2\sqrt{(1-c)}}$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{(1-c)}}\, l\frac{y-x^2[1-\sqrt{(1-c)}]}{y-x^2[1+\sqrt{(1-c)}]}$$

daher ist $\frac{x}{c'} = \left(\frac{y-x^2[1-\sqrt{(1-c)}]}{y-x^2[1+\sqrt{(1-c)}]}\right)^{\frac{-1}{2\sqrt{(1-c)}}}$, e

oder $\frac{x}{c'} = \left(\frac{y-x^2[1+\sqrt{(1-c)}]}{y-x^2[1-\sqrt{(1-c)}]}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{(1-c)}}}$, e

oder II°) $x = c'\left(\frac{y-x^2[1+\sqrt{(1-c)}]}{y-x^2[1-\sqrt{(1-c)}]}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{(1-c)}}}$, e

Es

Es bleibet nun noch der dritte Fall, wo $c > 1$ ist. In diesem Falle kann man die gefundene Differenzial-Gleichung also schreiben

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{(u-1)^2+(c-1)}$$

und, wenn man integriret, so bekommt man

$$l\frac{x}{c'} = \frac{1}{\sqrt{(c-1)}} \mathfrak{AT} \frac{u-1}{\sqrt{(c-1)}}$$

Denn es ist überhaupt

$$\int \frac{dz}{(z \pm a)^2 + b^2} = \frac{1}{b} \mathfrak{AT} \frac{z \pm a}{b}$$

welche Formel mit der 14ten im §. 4 beinahe die nämliche ist, und durch die Differenziazion bewiesen wird. Weil nun gefunden worden

$$l\frac{x}{c'} = \frac{1}{\sqrt{(c-1)}} \mathfrak{AT} \frac{u-1}{\sqrt{(c-1)}}$$

so ist $l\frac{x}{c'} \cdot \sqrt{(c-1)} = \mathfrak{AT} \frac{u-1}{\sqrt{(c-1)}}$

folglich ist $\frac{u-1}{\sqrt{(c-1)}} = \mathfrak{T}\left[l\frac{x}{c'} \cdot \sqrt{(c-1)}\right]$

oder weil $u = \frac{y}{x^2}$,

$$\frac{\frac{y}{x^2} - 1}{\sqrt{(c-1)}} = \mathfrak{T}\left[l\frac{x}{c'} \cdot \sqrt{(c-1)}\right]$$

III°) $$\frac{y-x^2}{x^2\sqrt{(c-1)}} = \mathfrak{T}\left[l\frac{x}{c'} \cdot \sqrt{(c-1)}\right]$$

Wenn wir also alles in der Kürze zusammen nehmen, so findet sich, daß wenn

$$x^4 \frac{d^2y}{dx^2} = (x^3 + 2xy)\frac{dy}{dx} - 4y^2$$

so wird entweder

I°) $l\frac{x}{c'} = \frac{x^2}{x^2 - y}$

oder II°) $x = c'\left(\frac{y - x^2[1 + \sqrt{(1-c)}]}{y - x^2[1 - \sqrt{(1-c)}]}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{(1-c)}}}$

oder III°) $\frac{y - x^2}{x^2\sqrt{(c-1)}} = \mathfrak{T}\left[l\frac{x}{c'}\cdot\sqrt{(c-1)}\right]$

nachdem man die willkürliche Größe c entweder $= 1$ oder < 1 oder > 1 annehmen will. Es ist in der Integral-Gleichung außer c noch eine willkürliche Größe c', welches auch nothwendig ist, da die gegebene Differenzial-Gleichung von der zweiten Ordnung ist. Denn wenn man eine Funkzion zum ersten male differenziret, so verschwindet eine beständige Größe, wenn sie vorhanden ist. Es kann aber wiederum in dem ersten Differenziale eine beständige Größe entstehen, welche bei der zweiten Differenziazion verschwindet. Also müssen bei der Integrazion einer Differenzial-Funkzion von der zweiten Ordnung allemal zwei willkürliche Größen angebracht werden.

§. 14.

Aufgabe.

Die veränderlichen Größen absondern, in einer Differenzial-Gleichung von der zweiten Ordnung, welche in Betrachtung des y, p und q gleichartig ist, ohne Rücksicht auf die Ausmessungen des x. (Unter p verstehe ich $\frac{dy}{dx}$ und unter q, $\frac{dp}{dx}$.)

Auflö-

Auflösung. Man mache $p = uy$, und $q = zy$, so bekommt man eine Gleichung zwischen x, u und z, woraus man z in einer Funkzion von x und u ziehen kann.

Weil angenommen ist $p = uy$

so ist $dp = udy + ydu$

Es ist aber $u = \frac{p}{y}$, folglich $du = \frac{ydp - pdy}{y^2}$, oder

$\frac{dp}{y} = \frac{pdy}{y^2}$, folglich $ydu = dp - \frac{pdy}{y}$, also

$$dp = udy + dp - \frac{pdy}{y}$$

$$o = udy - \frac{pdy}{y}$$

$$o = uydy - pdy$$

$$o = uy - p$$

$$o = uy - \frac{dy}{dx}$$

$$o = uydx - dy$$

$$o = udx - \frac{dy}{y}$$

$$\frac{dy}{y} = udx$$

Ferner weil $\frac{dp}{dx} = q = zy$, so ist $dp = zydx$

Da also $dp = zydx$

und auch $dp = udy + ydu$

so ist $udy + ydu = zydx$

$$udy = zydx - ydu$$

$$dy = \frac{zydx - ydu}{u}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{zdx - du}{u}$$

Weil nun $\frac{dy}{y} = u\,dx$

und $\frac{dy}{y} = \frac{z\,dx - du}{u}$

so ist $u\,dx = \frac{z\,dx - du}{u}$

$u^2\,dx = z\,dx - du$

$du + u^2\,dx = z\,dx$

Setzet man nun anstatt z, dessen Werth, welcher eine Funktion von x und u ist, so hat man eine Differenzial-Gleichung zwischen u und x von der ersten Ordnung. Man versuche daraus u zu erhalten, so kann man den Werth des y durch die Gleichung $\frac{dy}{y} = u\,dx$ bekommen.

Beispiel. Es sei diese Gleichung zu integriren

$$xyd^2y = ydxdy + xdy^2 + \frac{bxdy^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

oder $$xy\frac{d^2y}{dx^2} = y\frac{dy}{dx} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{bx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

oder $$xyq = yp + xp^2 + \frac{bxp^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

Man mache $p = uy$ und $q = zy$, so kommt

$$xy^2z = uy^2 + xu^2y^2 + \frac{bxu^2y^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

oder $$xz = u + xu^2 + \frac{bxu^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

daher ist $$z = \frac{u}{x} + u^2 + \frac{bu^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

Diesen

Dieſen Werth des z ſetze man in die Formel

$$du + u^2 dx - z dx$$

ſo kommt

$$du + u^2 dx = \frac{u dx}{x} + u^2 dx + \frac{b u^2 dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

$$\text{oder } du = \frac{u dx}{x} + \frac{b u^2 dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

$$x du = u dx + \frac{b u^2 x dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

$$x du - u dx = \frac{b u^2 x dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

$$\frac{x du - u dx}{u^2} = \frac{b x dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

$$-\frac{u dx - x du}{u^2} = \frac{b x dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

Das erſte Hauptglied wird integriret durch $c - \frac{x}{u}$. Um das zweite Glied zu integriren, ſetze man $\sqrt{(a^2 - x^2)} = t$ (§. 5), ſo wird $x = \sqrt{(a^2 - t^2)}$, $dx = \frac{-t dx}{\sqrt{(a^2 - t^2)}}$, folglich $\frac{b x dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = -b dt$, wovon das Integral $-bt$ iſt, oder $-b\sqrt{(a^2 - x^2)}$. Alſo wird

$$c - \frac{x}{u} = -b\sqrt{(a^2 - x^2)}$$

$$uc - x = -bu\sqrt{(a^2 - x^2)}$$

$$-x = -u[c + b\sqrt{(a^2 - x^2)}]$$

$$u = \frac{x}{c + b\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

Dieſen Werth des u ſetze man in die Formel

$$\frac{dy}{y} = u\,dx$$

ſo kommt $\frac{dy}{y} = \frac{x\,dx}{c+b\sqrt{(a^2-x^2)}}$

Um hier das zweite Glied zu integriren, ſetze man wiederum $\sqrt{(a^2-x^2)} = t$, ſo wird wie vorher $x = \sqrt{(a^2-t^2)}$, $dx = \frac{-t\,dt}{\sqrt{(a^2-t^2)}}$ folglich $\frac{x\,dx}{c+b\sqrt{(a^2-x^2)}} = \frac{-t\,dt}{c+bt}$ $= -\frac{dt}{b} + \frac{c\,dt}{b(c+bt)}$. Hiervon iſt das Integral $-\frac{t}{b} + \frac{c}{b^2} l(c+bt)$ oder $-\frac{1}{b}\sqrt{(a^2-x^2)} + \frac{c}{b^2} l[c+b\sqrt{(a^2-x^2)}]$

Integriret man demnach die gefundene Gleichung

$$\frac{dy}{y} = \frac{x\,dx}{c+b\sqrt{(a^2-x^2)}}$$

ſo kommt

$$l\frac{y}{c} = -\frac{1}{b}\sqrt{(a^2-x^2)} + \frac{c}{b^2} l[c+b\sqrt{(a^2-x^2)}]$$

Und dieſes Integral iſt vollſtändig, weil es zwei willkürliche Größen enthält.

Ein

Ein und zwanzigstes Hauptstück.

Von einigen merkwürdigen Eigenschaften der Funkzionen, und von der Variazionsrechnung.

§. 1.

Obgleich wir bis jetzt das Wissenswürdigste, sowohl von den endlichen Funkzionen, als auch von den Differenzial-Funkzionen angeführet haben, so giebt es doch noch verschiedene merkwürdige Eigenschaften derselben, die in höheren Rechnungen einen entschiedenen Nutzen haben. Herr de la Grange hat sie auf eine sehr scharfsinnige Art, und auf seinem eigenen Wege in seiner Théorie des fonctions analytiques vorgetragen. Wir wollen sie aber hier an unser ganzes Lehrgebäude anknüpfen, und die Beweise aus demselben herleiten.

§. 2.

Damit wir uns desto kürzer ausdrücken können, so soll fx, oder Fx eine beliebige Funkzion von x anzeigen, eben so wird $f(x,y)$ oder $F(x,y)$ eine Funkzion von x und y sein.

Wenn man eine Funkzion von x differenziret, dabei dx als beständig betrachtet, die gegebene Funkzion selbst aber

aber mit y bezeichnet, so sind $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}$, u. s. w. lauter endliche Größen. Diese wollen wir andeuten durch fx, $f'x$, $f''x$, $f'''x$, u. s. w. oder Fx, $F'x$, $F''x$, $F'''x$, u. s. w. oder auch durch y' y'' y''' y'''' u. s. w.

§. 3.

Es ist am gehörigen Orte (H. XVII. §. 2) bewiesen worden, daß wenn y eine Funkzion von x ist, wenn x um Δx und y dadurch um Δy zunimmt, alsdann sein wird

$$y+\Delta y = y+\frac{dy}{1dx}\Delta x+\frac{d^2y}{1.2dx^2}\Delta x^2+\frac{d^3y}{1.2.3dx^3}\Delta x^3 + \frac{d^4y}{1.2.3.4dx^4}\Delta x^4+\&c.$$

Bezeichnen wir jetzt y durch fx, und Δx durch ω, so ist $y+\Delta y = F(x+\omega)$, und wir haben

$$f(x+\omega) = fx+\frac{f'x}{1}\omega+\frac{f''x}{1.2}\omega^2+\frac{f'''x}{1.2.3}\omega^3 + \frac{f''''x}{1.2.3.4}\omega^4+\&c.$$

§. 4.

Aufgabe.

Eine Funkzion von x in eine unendliche Reihe verwandeln.

Auflö-

Auflösung. Laßt uns bloß durch f, f', f'', f''', f'''', u. s. f. anzeigen, was aus fx, $f'x$, $f''x$, $f'''x$, $f''''x$, u. s. w. wird, wenn man $x = 0$ machet. Wir wollen nun in der Reihe, die den vorigen Paragragh endiget, x zu null machen, und dagegen ω in x verwandeln, woran uns nichts hindert. In diesem Falle bekommen wir

$$fx = f + \frac{f'}{1}x + \frac{f''}{1.2}x^2 + \frac{f'''}{1.2.3}x^3 + \frac{f''''}{1.2.3.4}x^4 + \text{u. s. w.}$$

Anmerkung. Dieses ist ein Lehrsatz, der sehr bequem ist, wenn man eine Funkzion in eine unendliche Reihe entwickeln will. Nämlich man differenziret die gegebene Funkzion zum 1sten, 2ten, 3ten und 4ten Male, u. s. w. Man machet x zu null, sowohl in fx als in $f'x$, $f''x$, $f'''x$, $f''''x$, u. s. w. Die dadurch erhaltenen Werthe werden in die eben jetzt gefundene Formel eingetauschet.

§. 5.

Aufgabe.

Wenn eine Funkzion von x nur bis zu einem gewissen Gliede entwickelt wird, so soll der aus den mangelnden Gliedern entstehende Irrthum geschätzet werden.

Vorbereitung. Man wird sich leicht überzeugen können, daß $f(x+\omega)$ einen Werth hat der zwischen $fx + \frac{f'x}{1}\omega$ und $fx + \frac{f'(x+\omega)}{1}\omega$ fällt. Denn, wenn man

bloß

bloß annimmt $f(x+\Omega) = fx + \frac{fx}{1}\Omega$, so fehlen in der unendlichen Reihe die Glieder $\frac{f''x}{1.2}\Omega^2 + \frac{f'''x}{1.2.3}\Omega^3 + \frac{f''''x}{1.2.3.4}\Omega^4 + \&c.$

Setzet man hingegen $f(x+\Omega) = fx + \frac{f'(x+\Omega)}{1}\Omega$, so stelle ich folgende Betrachtung an. Es ist

$$f(x+\Omega) = fx + \frac{f'x}{1}\Omega + \frac{f''x}{1.2}\Omega^2 + \frac{f'''x}{1.2.3}\Omega^3 + \frac{f''''x}{1.2.3.4}\Omega^4 + \&c.$$

wo man Ω als eine endliche, und wenn man will beständige Größe betrachten muß. Differenziret man diese Gleichung, indem man auch dx als beständig ansiehet, und dividiret man alles durch dx, so wird $\frac{dy}{dx}$ zu $\frac{d^2y}{dx^2}$; dieses zu $\frac{d^3y}{dx^3}$, u. s. w. Desgleichen $y + \Delta y$ zu $\frac{d(y+\Delta x)}{dx}$, das heißt, es wird fx zu $f'x$, $f'x$ zu $f''x$, $f''x$ zu $f'''x$, u. s. w. desgleichen $f(x+\Omega)$ zu $f'(x+\Omega)$ also bekommt man

$$f'(x+\Omega) = f'x + \frac{f''x}{1}\Omega + \frac{f'''x}{1.2}\Omega^2 + \frac{f''''x}{1.2.3}x\Omega^3 + \&c.$$

und

$$\Omega f'(x+\Omega) = \frac{f'x}{1}\Omega + \frac{f''x}{1}\Omega^2 + \frac{f'''x}{1.2}\Omega^3 + \frac{f''''x}{1.2.3}\Omega^4 + \&c.$$

und

$fx + f'$

$$fx+f'\frac{(x+\Omega)}{1}\Omega=fx+\frac{f'x}{1}\Omega+\frac{f''x}{1}\Omega^2+\frac{f'''x}{1.2}\Omega^3 + \frac{f''''x}{1.2.3}\Omega^4+\&c.$$

anſtatt

$$fx+\frac{f'x}{1}\Omega+\frac{f''x}{1.2}\Omega^2+\frac{f'''x}{1.2.3}\Omega^3+\frac{f''''x}{1.2.3.4}\Omega^4+\&c.$$

Ziehet man dieſe Reihe von derjenigen ab welche $f(x+\Omega)$ ausdrucket, ſo bleibet

$$\frac{1f''x}{1.2}\Omega^2+\frac{2f'''x}{1.2.3}\Omega^3+\frac{3f''''x}{1.2.3.4}\Omega^4+\&c.$$

woraus man ſiehet daß $fx+\frac{f'(x+\Omega)}{1}\Omega$ zu viel iſt. Es war aber $fx+\frac{f'x}{1}\Omega$ zu wenig, alſo iſt der wahre Werth von $f(x+\Omega)$ zwiſchen beiden. Geſetzt einige der Größen $f'x$, $f''x$, $f'''x$ &c. würden verneinet, ſo kann dieſes weiter nichts ändern als daß das zu viel in zu wenig, und das zu wenig in zu viel verwandelt wird. Es bleibt demnach immer der wahre Werth zwiſchen beiden.

Der eben bewieſene Lehrſatz kann alſo ausgedrucket werden: es iſt

$$f(x+\Omega)=fx+\frac{f'(x+u)}{1}\Omega$$

wo man unter u eine Größe verſtehet die größer iſt als null und kleiner als Ω.

Auf eine ganz ähnliche Art wird man beweiſen können daß

$$f(x+\Omega)=fx+\frac{f'x}{1}\Omega+\frac{f''(x+u)}{1.2}\Omega^2$$

eben

eben so daß

$$f(x+\omega) = fx + \frac{f'x}{1}\omega + \frac{f''x}{1.2}\omega^2 + \frac{f'''(x+u)}{1.2.3}\omega^3$$

wo nämlich allemal u zwischen null und ω ist.

Wenn man in den zuletzt gefundenen Ausdrücken für $f(x+\omega)$ annimmt, daß $x = 0$ wird und $\omega = x$, so kommt

$$fx = f + \frac{f'u}{1}x$$

$$fx = f + \frac{f'}{1}x + \frac{f''u}{1.2}x^2$$

$$fx = f + \frac{f'}{1}x + \frac{f''}{1.2}x^2 + \frac{f'''u}{1.2.3}x^3$$

$$fx = \&c.$$

Wo u allemal zwischen 0 und x ist, und wo f, f', f'', die Werthe von y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, bedeuten, für den Fall wo $x = 0$.

Auf eine noch bequemere Art kann man statt u setzen λx, wo λ eine Zahl bedeutet die zwischen null und 1 ist. Dieses angenommen so erhält man folgende Auflösung.

Auflösung. Wenn f, f', f'' u. s. w. dasjenige bedeuten was aus fx, $f'x$, $f''x$ u. s. w. wird, wenn $x = 0$, und wenn λ eine Zahl zwischen 0 und 1 ist, so hat man

$$fx = f + \frac{f'\lambda x}{1}x$$

$$fx = f + \frac{f'x}{1}x + \frac{f''\lambda x}{1.2}x^2$$

$fx =$

$$fx = f + \frac{f'x}{1}x + \frac{f''x}{1.2}x^2 + \frac{f'''\lambda x}{1.2.3}x^3$$

$$fx = \&c.$$

Die Glieder worin λ befindlich ist, zeigen hier die Grenzen an, zwischen welchen das Fehlende lieget.

Beispiel. Gesetzt es sei $fx = (b+x)^{\frac{m}{n}}$, und man wolle diese Funkzion bis zu 3 Gliedern entwickeln, und schätzen was das Fehlende betrage.

$$fx = (b+x)^{\frac{m}{n}}$$

$$f'x = \frac{m}{n}(b+x)^{\frac{m}{n}-1}$$

$$f''x = \frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)(b+x)^{\frac{m}{n}-2}$$

$$f'''\lambda x = \frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)(b+\lambda x)^{\frac{m}{n}-3}$$

Hieraus ergiebt sich

$$f = b^{\frac{m}{n}}$$

$$f' = \frac{m}{n}b^{\frac{m}{n}-1}$$

$$f'' = \frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)b^{\frac{m}{n}-2}$$

Also ist

$$(b+x)^{\frac{m}{n}} = b^{\frac{m}{n}} + \frac{1}{1}\cdot\frac{m}{n}b^{\frac{m}{n}-1}x$$

[S. folgende Seite]

$$+\frac{1}{1.2}$$

$$+\frac{1}{1.2}\cdot\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)b^{\frac{m}{n}-1}x^2$$

$$+\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)(b+\lambda x)^{\frac{m}{n}-3}x^3$$

Hier sind also die drei ersten Glieder richtig. Was fehlet fällt zwischen

$$\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)b^{\frac{m}{n}-3}x^3$$

und $$\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)(b+x)^{\frac{m}{n}-3}x^3$$

§. 6.

Aufgabe.

Es soll eine Funkzion von x und y durch eine unendliche Reihe ausgedrucket werden.

Vorbereitung. Es sei $f(x,y)$ eine solche Funkzion. Betrachtet man fürs erste blos x als veränderlich, und nimmt man an daß x um I größer werde, so ist (§. 4)

$$f(x+I,y)=f(x,y)+\frac{f'(x,y)}{I}I+\frac{f''(x,y)}{I.\ 2}I^2$$

$$+\frac{f'''(x,y)}{I.\ 2.\ 3}I^3+\&c.$$

Wir wollen nun annehmen, es werde y größer um Ω, so bekommen wir

$$f(x+I,y+\Omega)=f(x,y+\Omega)+\frac{f'(x+y+\Omega)}{I}I$$

$$+\frac{f''(x,y+\Omega)}{I.\ 2}I^2+\frac{f'''(x,y+\Omega)}{I.\ 2.\ 3}I^3+\&c.$$

Laßt uns jedes einzelne Glied nach den Potenzen von Ω entwickeln,

entwickeln, indem wir jetzt x als unveränderlich ansehen; so ist

$$f(x,y+\Omega) = f(x,y) + \frac{f_{,}(x,y)}{1}\Omega + \frac{f_{,,}(x,y)}{1.\ 2}\Omega^2 + \frac{f_{,,,}(x,y)}{1.\ 2.\ 3}\Omega^3 + \&c.$$

wo die unteren Striche eine Differenziazion in Betrachtung des y allein anzeigen sollen, die oberen Striche bleiben für die Veränderungen des x. Also hätten wir den Werth von $f(x,y+\Omega)$ als vom ersten Gliede der zweiten unendlichen Reihe dieses Paragraphs. Das zweite Glied ist $f'(x,y+\Omega)I$. Der obere Strich zeiget eine Differenziazion in Betrachtung des x an. Wenn wir also die letzt angeführte unendliche Reihe dieses Paragraphs in Betrachtung des x differenziren und fürs erste I weglassen, so erhalten wir

$$f'(x,y+\Omega) = f'(x,y) + \frac{f'_{,}(x,y)}{1}\Omega + \frac{f'_{,,}(x,y)}{1.\ 2}\Omega^2 + \frac{f'_{,,,}(x,y)}{1.\ 2.\ 3}\Omega^3 + \&c.$$

Das folgende Glied in der zweiten unendlichen Reihe dieses Paragraphs ist $\frac{f''(x,y+\Omega)}{1.\ 2}I^2$. Wenn wir fürs erste $\frac{I}{1.2}$ und I^2 weglassen; so bleibet uns bloß die kurz vorher gefundene Reihe in Betrachtung des x zu differenziren, welches giebet

$$f''(x,y+\Omega) = f''(x,y) + \frac{f''_{,}(x,y)}{1}\Omega + \frac{f''_{,,}(x,y)}{1.\ 2}\Omega^2 + \frac{f''_{,,,}(x,y)}{1.\ 2.\ 3}\Omega^3 + \&c.$$

Wenn man nun in die zweite unendliche Reihe dieses Paragraphs die nachher gefundenen Werthe der Glieder eintauschet, und wenn man alles nach den Potenzen und Produkten von I und Ω ordnet, so erhält man

$$f(x+I,y+\Omega) = f(x,y) + \frac{f'(x,y)}{I} I + \frac{f_{,}(x,y)}{I} \Omega$$
$$+ \frac{f''(x,y)}{I.\,2} I^2 + \frac{f'_{,}(x,y)}{I.\,1} I\Omega$$
$$+ \frac{f_{,,}(x,y)}{I.\,2} \Omega^2 + \frac{f'''(x,y)}{I.\,2.\,3} I^3 + \frac{f''_{,}(x,y)}{I.\,2.\,1} I^2\Omega$$
$$+ \frac{f'_{,,}(x,y)}{I.\,1.\,2} I\Omega^2 + \frac{f_{,,,}(x,y)}{I.\,2.\,3} \Omega^3 + \&c.$$

Die allgemeine Form der Glieder ist

$$\frac{f^{m}{}^{n}(x,y)}{(I.2.3...m)(I.2.3...n)} I^m \Omega^n$$

wo m die Anzahl der Differenziazionen in Betrachtung des x, hingegen n die Anzahl derselben in Betrachtung des y andeutet.

Da nun x und I, y und Ω so groß sein können als man will, so hindert nichts anzunehmen, daß $x = 0, I = x$, $y = 0, \Omega = y$ werde. Machen wir diese Eintauschungen, so erhalten wir folgende

Auflösung. $$f(x,y) = f + \frac{f'}{I} x + \frac{f_{,}}{I} y + \frac{f''}{I.\,2} x$$
$$+ \frac{f'_{,}}{I.\,1} xy + \frac{f_{,,}}{I.\,2} y^2 + \frac{f'''}{I.\,2.\,3} x^3$$
$$+ \frac{f''_{,}}{I.\,2.\,1} x^2 y + \frac{f'_{,,}}{I.\,1.\,2} xy^2 + \frac{f_{,,,}}{I.\,2.\,3} y^3$$
$$+ \&c.$$

wo

wo die allgemeine Form der Glieder ist

$$\frac{f_n^m}{(1.2.3...m)(1.2.3...n)} x^m y^n$$

Hier bedutet f so viel als $f(x,y)$ worin x und y beide $= o$ gemachet worden; f' bedeutet das erste Differenzial derselben Funkzion in Betrachtung des x genommen, und darin x und $y = o$ gemacht; $f_,$ ist das erste Differenzial von $f(x,y)$ in Betrachtung des y genommen, und worin x und $y = o$ gemacht, u. s. w. Eben so bedeutet f'', so viel als die gegebene Funkzion 2mal in Betrachtung des x und einmal in Betrachtung des y differenziret, worin zuletzt x und $y = o$ gemacht; f_n^m heißt so viel als $f(x,y)$ m Mal in Betrachtung des x, und n Mal in Betrachtung des y differenziret, worin x und $y = o$ gemacht. Unter dem Differenziale verstehen wir immer eigentlich den endlichen Theil desselben, und $f_n^m(x,y)$ ist eigentlich $\frac{d_n^m f(x,y)}{(dx)^m (dy)^n}$, hier heißt d_n^m das $m$te Differenzial in Betrachtung des x, und von diesem Differenziale wiederum das $n$te in Betrachtung des y.

Zusatz. Wenn man $f_n^m(x,y)$ suchet, so ist es gleich viel ob man erstlich m Mal in Betrachtung des x, und dem n Mal in Betrachtung des y, oder erst $n$mal in Betrachtung des y und dann m mal in Betrachtung des x differenziret. Man kann auch wechselsweise in Betrachtung des x und des y differenziren. Denn es sei

$$f(x,y) = A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2 + Gx^3 + Hx^2y + Ixy^2 + Ky^3 + \&c.$$

welches die allgemeine Form der razionalen Funkzionen von x und y ist. Hat die Funkzion nicht diese Gestalt, so wird sie sich in eine unendliche Reihe verwandeln lassen, welche so gestaltet ist. Man nehme nun die eben

jetzt angeführte Reihe, und differenzire zum Beispiel zweimal in Betrachtung des x und 1 mal in Betrachtung des y, oder erst 1 mal in Betrachtung des y, und dann 2 mal in Betrachtung des x, oder 1 mal in Betrachtung des x, dann 1 mal in Betrachtung des y, dann wieder 1 mal in Betrachtung des x, so wird man leicht einsehen, daß dieselbigen Veränderungen, nur in einer andern Ordnung, geschehen müssen, und daß also das endliche Resultat dasselbige ist. Was nun von der Entwickelung $A + Bx + Cy + \&c.$ gilt, muß auch von der entwickelten $f(x,y)$ gelten. Also ist die Ordnung nach welcher man differenziret willkürlich.

§. 7.

Wenn eine Funkzion von x und y bis zu einem gewissen Gliede entwickelt wird, so soll der Werth der fehlenden Glieder geschätzet werden.

Vorbereitung. Laßt uns unsere im vorigen Paragraph gefundene Reihe wieder vornehmen. Es war

$$f(x+\mathrm{I},y+\Omega) = f(x,y) + \frac{f'(x,y)}{\mathrm{I}}\mathrm{I} + \frac{f_{,}(x,y)}{\mathrm{I}}\Omega + \frac{f''(x,y)}{\mathrm{I}.\,2}\mathrm{I}^2 + \frac{f'_{,}(x,y)}{\mathrm{I}.\,\mathrm{I}}\mathrm{I}\Omega + \frac{f_{,,}(x,y)}{\mathrm{I}.\,2}\Omega^2 + \frac{f'''(x,y)}{\mathrm{I}.\,2.\,3}\mathrm{I}^3 + \frac{f''_{,}(x,y)}{\mathrm{I}.\,2.\,\mathrm{I}}\mathrm{I}^2\Omega + \frac{f'_{,,}(x,y)}{\mathrm{I}.\,\mathrm{I}.\,2}\Omega^2 + \frac{f_{,,,}(x,y)}{\mathrm{I}.\,2.\,3}\Omega^3 + \&c.$$

Hier

Hier ist leicht zu beweisen, daß diese Reihe oder der Werth von $f(x+\mathrm{I},y+\Omega)$ mehr beträgt als

$$f(x,y)+\frac{f'(x,y)}{\mathrm{I}}\mathrm{I}+\frac{f_{,}(x,y)}{\mathrm{I}}\Omega$$

und weniger als

$$f(x,y)+\frac{f'(x\mathrm{I},y+\Omega)}{\mathrm{I}}\mathrm{I}+\frac{f_{,}(x+\mathrm{I},y+\Omega)}{\mathrm{I}}\Omega$$

Denn es fällt in die Augen, daß im ersten dieser Ausdrücke alle Glieder fehlen die mehr als eine Ausmessung in I und Ω haben. Was den zweiten Ausdruck betrifft, so nehme man den im Anfange dieser Vorbereitung angeführten Werth von $f(x+\mathrm{I},y+\Omega)$ wieder vor, und differenzire ihn in Betracht des x, so kommt

$$\begin{aligned}f'(x+\mathrm{I},y+\Omega)=&\frac{f'(x,y)}{\mathrm{I}}+\frac{f''(x,y)}{\mathrm{I}}\mathrm{I}\\&+\frac{f'_{,}(x,y)}{\mathrm{I}.\ 2}\Omega+\frac{f'''(x,y)}{\mathrm{I}.\ 2}\mathrm{I}^2\\&+\frac{f''_{,}(x,y)}{\mathrm{I}.\ \mathrm{I}}\mathrm{I}\Omega+\frac{f'_{,,}(x,y)}{\mathrm{I}.\ 2}\Omega^2\\&+\frac{f''''(x,y)}{\mathrm{I}.\ 2.\ 3}\mathrm{I}^3+\frac{f'''_{,}(x,y)}{\mathrm{I}.\ 2.\ \mathrm{I}}\mathrm{I}^2\Omega\\&+\frac{f''_{,,}(x,y)}{\mathrm{I}.\ \mathrm{I}.2}\mathrm{I}\Omega^2+\frac{f'_{,,,}(x,y)}{\mathrm{I}.\ 2.\ 3}\Omega^3\\&+\&c.\end{aligned}$$

Differenziret man nun ebenfalls in Betrachtung des y, so kommt

$$\begin{aligned}f_{,}(x+\mathrm{I},y+\Omega)=&\frac{f_{,}(x,y)}{\mathrm{I}}+\frac{f'_{,}(x,y)}{\mathrm{I}}\mathrm{I}\\&+\frac{f_{,,}(x,y)}{\mathrm{I}}\Omega\end{aligned}$$

[S. folgende Seite]

$$+\frac{f''_{,}(x,y)}{1.\ 2}\,I^2+\frac{f'_{,}(x,y)}{1.\ 1}\,I\,\Omega$$
$$+\frac{f_{,,}(x,y)}{1.\ 2}\,\Omega^2+\frac{f'''_{,}(x,y)}{1.\ 2.\ 3}\,I^3$$
$$+\frac{f'_{,,}(x,y)}{1.\ 2.\ 1}\,I^2\,\Omega+\frac{f_{,,,}(x,y)}{1.\ 1.\ 2}\,I\,\Omega^2$$
$$+\frac{f_{,,,,}(x,y)}{1.\ 2.\ 3}\,\Omega^3+\&c.$$

Wenn man die beiden unendliche Reihen zusammen nimmt, die erste mit I, die zweite mit Ω multipliziret und $f(x,y)$ vorsetzet, so kommt

$$f(x,y)+\frac{f'(x+I,y+\Omega)}{1}\,I+\frac{f_{,}(x+I,y+\Omega)}{1}\,\Omega$$
$$=f(x,y)+\frac{f'(x,y)}{1}\,I+\frac{f_{,}(x,y)}{1}\,\Omega+\frac{f''(x,y)}{1}\,I^2$$
$$+\frac{2f'_{,}(x,y)}{1}\,I\,\Omega+\frac{f_{,,}(x,y)}{1}\,\Omega^2+\frac{f'''(x,y)}{1.\ 2}\,I^3$$
$$+\frac{2f''_{,}(x,y)}{1.\ 2}\,I^2\,\Omega+\frac{2.\,f'_{,,}(x,y)}{1.\ 2}\,I\,\Omega^2+\frac{f'''(x,y)}{1.\ 2}\,\Omega^3$$
$$+\&c.$$

Ohne daß man weiter gehe, siehet man schon, daß diese Reihe zu viel beträgt, weil die Zahlen in den Nennern kleiner sind, als in dem Werthe von $f(x,y)$ der vom Anfange dieser Vorbereitung angeführet worden. Es ist demnach gewiß, daß der Werth von $f(x+1,y+\Omega)$ befindlich ist zwischen

$$f(x,y)+\frac{f'(x,y)}{1}\,I+\frac{f_{,}(x,y)}{1}\,\Omega$$

und

$$\text{und } f(x,y) + \frac{f'(x+I,y+\Omega)}{I}\Omega + \frac{f_{,}(x+I,y+\Omega)}{I}$$

Wir haben hierbei angenommen, daß die Glieder alle bejahet sind; sind einige verneinte darunter, so können sie höchstens verursachen daß zu viel sich in zu wenig, und umgekehrt, verwandelt.

Man kann die gefundene Wahrheit ausdrucken, indem man saget

$$f(x+I,y+\Omega) = f(x,y) + \frac{f'(x+u,y+v)}{I} I + \frac{f_{,}(x+u,y+v)}{I}\Omega$$

wo man unter u eine Quantität verstehen muß, welche größer ist als null und kleiner als I, und unter v eine Quantität, welche größer ist als null, und kleiner als Ω.

Auf eine ähnliche Art läßt sich beweisen, daß

$$f(x+I,y+\Omega) = f(x,y) + \frac{f'(x,y)}{I} I + \frac{f'(x,y)}{I}\Omega + \frac{f''(x+u,y+v)}{I.\ 2} I^2 + \frac{f'_{,}(x+u,y+v)}{I.\ I} I\Omega + \frac{f_{,,}(x,y)}{I.\ 2}\Omega^2$$

ferner daß

$$f(x+I,y+\Omega) = f(x,y) + \frac{f'(x,y)}{I} I + \frac{f_{,}(x,y)}{I}\Omega + \frac{f''(x,y)}{I.\ 2} I^2 + \frac{f'_{,}(x,y)}{I.\ I} I\Omega + \frac{f_{,,}(x,y)}{I.\ 2}\Omega^2$$

$$+\frac{f'''(x+u,y+v)}{1.\ 2.\ 3}\,l^3+\frac{f''_{,}(x+u,y+v)}{1.\ 2.\ 1}\,l^2\omega$$
$$+\frac{f'_{,,}(x+u,y+v)}{1.\ 1.\ 2}\,l\omega^2+\frac{f_{,,,}(x+u,y+v)}{1.\ 2.\ 3}\,\omega^3$$

wo allemal u zwischen null und l, hingegen v zwischen null und ω ist. Und so kann man weiter gehen. Machet man $x=0, y=0, l=x, \omega=y$, so ist u zwischen null und x, v zwischen o und y. Man kann demnach u durch λx, und v durch λy bezeichnen, indem man unter λ eine Zahl zwischen o und 1 verstehet. Machet man alle diese Eintauschungen, und bezeichnet man durch

$$ff'\ f,\ f''\ f',\ f_{,,}\ \text{u. s. w.}$$

dasjenige was aus $f(x,y)$, $f'(x,y)$, $f_{,}(x,y)$, $f''(x,y)$, $f'_{,}(x,y)$, $f_{,,}(x,y)$ u. s. w. wird. wenn $x=0$ und $y=0$, so bekommt man folgende

Auflösung. Es ist entweder

$$f(x,y)=f+\frac{f'(\lambda x,\lambda y)}{1}\,x+\frac{f_{,}(\lambda x,\lambda y)}{1}\,y$$

oder

$$f(x,y)=f+\frac{f'}{1}\,x+\frac{f_{,}}{1}\,y+\frac{f''(\lambda x,\lambda y)}{1.\ 2}\,x$$
$$+\frac{f'_{,}(\lambda x,\lambda y)}{1.\ 1}\,xy+\frac{f_{,,}(\lambda x,\lambda y)}{1.\ 2}\,y^2$$

oder

$$f(x,y)=f+\frac{f'}{1}\,x+\frac{f_{,}}{1}\,y+\frac{f''}{1.\ 2}\,x^2$$
$$+\frac{f'_{,}}{1.\ 1}\,xy+\frac{f_{,,}}{2}\,y^2+\frac{f'''(\lambda x,\lambda y)}{1.\ 2.\ 3}\,x^3$$

$+f''$

$$+\frac{f''_{,}(\lambda x,\lambda y)}{1.2.1}x^2y+\frac{f'_{,,}(\lambda x,\lambda y)}{1.\ 1.2}xy^2$$

$$+\frac{f_{,,,}(\lambda x,\lambda y)}{1.2.3}y^3$$

und so kann man weiter gehen. Bei allen diesen Formeln ist, laut der Vorbereitung, λ zwischen o und 1, und f f' f, f'' $f'_{,}$ u. s. w. sind die Werthe von $f(x,y)$, f' $x,y)$, $f,$ $x,y)$, $f''(x,y)$, $f'_{,}(x,y)$ u. s. w. für den Fall daß $x=o$ sei.

§. 8.

Lehrsatz.

Angenommen, man habe zwei Differenzialfunkzionen von x und y, welche durch verschiedene auf einander folgende Differenziazionen einer endlichen Funkzion von x entstanden sind, so daß die eine

$$f^m_n(x,y)$$

entstanden sei aus einer Funkzion von x und y, m mal in Betrachtung des x, und n mal in Betrachtung des y differenziret; und daß die andere

$$f^p_q(x,y)$$

eine p malige Differenziazion in Betrachtung des x und eine q malige in Betrachtung des y voraussetze; so folget daraus nothwendig daß

$$f^p_q[f^m_n(x,y)]=f^m_n[f^p_q(x,y)]$$

Beweis. Weil es einerlei ist nach welcher Ordnung man in Betreff des x oder des y differenziret (§. 6. Zus.), so ist es gleichviel ob ich f $x,y)$ erst m mal in Betrachtung des x differenzire, und n mal in Betrachtung des y, dann

aber

aber p mal in Betrachtung des x und q mal in Betrachtung des y; oder ob ich diese Ordnung umkehre indem ich erstlich p mal in Betrachtung des x differenzire, und q mal in Betrachtung des y, nachher aber m mal in Betrachtung des x, und n mal in Betrachtung des y. Es ist also wirklich

$$f_q^p\left[f_n^m(x,y)\right] = f_n^m\left[f_q^p(x,y)\right]$$

denn beides macht im Grunde weder mehr noch weniger als

$$f_{q+n}^{p+m}(x,y)$$

das heißt $f(x,y)$, $p+m$ mal in Betrachtung des x differenziret, und $q+n$ mal in Betrachtung des y.

Zusatz I. Hieraus also läßt sich erkennen ob *ein* Differenzial richtig sei (H. XVI. §. 28). Nämlich es sind gegeben zwei Differenzial-Funkzionen von x und y, die eine wird ausgegeben für

$$f_n^m(x,y)$$

die andere für $f_q^p(x,y)$

Will ich wissen ob diese Angabe ihre Richtigkeit hat, so untersuche ich ob

$$f_q^p\left[f_n^m(x,y)\right] = f_n^m\left[f_q^p(x,y)\right]$$

findet diese Gleichheit statt, so ist die Angabe richtig; wo nicht, so ist sie unrichtig.

Zusatz II. Es sei eine Differenzial-Funkzion vorgestellet durch $Mdx+Ndy$, wo M und N Funkzionen

von

von x und y sind, so muß, wenn dieses Differenzial richtig ist, darin enthalten sein: das erste Differenzial in Betrachtung des x, welches wäre Mdx; und das erste Differenzial in Betrachtung des y, welches wäre Ndy. Hier hätten wir demnach $M = f'_\circ(x,y)$ und $N = f^\circ,(x,y)$ wo die Null keine Differenziazion, erstlich in Betrachtung des x, dann in Betrachtung des y anzeiget. Um zu prüfen ob dieses seine Richtigkeit hat, muß untersuchet werden ob

$$f^\circ,[f'_\circ(x,y)] = f'_\circ[f,^\circ(x,y)]$$

oder ob

$$f^\circ,M = f'_\circ N$$

oder ob

$$f,M = f'N$$

das heißt ob das erste Differenzial des M in Betrachtung des y gleich sei, dem ersten Differenzial des N in Betrachtung des x.

Diese Regel ist schon im XVIten Hauptstücke §. 30 anders bewiesen worden; hier aber ist sie aus weit allgemeineren Gründen hergeleitet.

§. 9.

Gemeiniglich stellet man sich vor, die willkührliche beständige Größe, welche man beim Integriren zusetzen muß, entsteht daher, weil beim Differenziren jedes Glied verschwindet, worin bloße beständige Größen befindlich lich sind. Allein es kann auch eine beständige Größe, vermöge einer Gleichung und ihrer Differenzialgleichung ausgemerzet werden; dann entstehet eine neue Differenzialgleichung worin die eine beständige Größe fehlet, und folglich muß solche beim Integriren ersetzet werden. Herr de la Grange giebt davon folgendes Beispiel. Es sei

$$x^2 - 2ay - a^2 - b^2 = 0$$

so

so ist $x - ay' = 0$

wo y' so viel ist als $\frac{dy}{dx}$

Wenn man nun mittelst dieser letztern Gleichung und der ersten das a ausmerzet, so findet man

$$x - [-y + \sqrt{(x^2 + y^2 - b^2}\,]\,y' = 0$$

Dieses ist also auch eine Differenzial-Gleichung, wovon die erste das Integral sein wird, nachdem noch die beständige Größe a, welche hier fehlet, hinzugekommen sein wird.

§. 10.

Eine noch wichtigere Bemerkung ist diese. Man kann, statt einer beständigen Größe a, eine veränderliche Größe, welche eine Funkzion von x ist, in die endliche Gleichung setzen, so daß jene Größe ebenfalls in der Differenzialgleichung verschwinde.

Denn, wenn a als veränderlich angenommen wird, so ist die endliche oder ursprüngliche Gleichung nicht bloß zwischen x und y, sondern sie ist zwischen x, y und a, wo a eine Funkzion des x ist. Die Differenzialgleichung der gegebenen Funkzion wird also einen Theil enthalten welcher mit $\frac{da}{dx}$ oder a' multipliziret ist, und es kann allemal ein Werth des a gefunden werden, der diesen Theil null machet; hat nun a einen solchen Werth, so verschwindet alles was mit $\frac{da}{dx}$ oder a' multipliziret ist, eben so gut als wenn a beständig wäre. Zum Beispiel wenn man die Gleichung des vorigen Paragraphs

$$x^2 - 2ay - a^2 - b^2 = 0$$

in Betrachtung des x, y und a differenziret, so kommt

$$x - ay' - (y + a)a' = 0$$

Machet

Machet man nun $a = -y$ so verschwindet das Glied

$$-(y+a)a' = 0$$

Setzet man nun $-y$ statt a in die Gleichung

$$x^2 - 2ay - a^2 - b^2 = 0$$

so wird daraus

$$x^2 + y^2 - b^2 = 0$$

Diese Gleichung muß der Differenzialgleichung

$$x - [-y + \sqrt{(x^2+y^2-b^2)}]y' = 0$$

oder $x + yy' - y'\sqrt{(x^2+y^2-b^2)} = 0$

ebenfalls Genüge leisten. Und sie thut es in der That. Denn sie giebt $y^2 = b^2 - x^2$ und $yy' = -x$, und diese Werthe machen die Differenzialgleichung richtig.

§. 11.

Man siehet aus dem vorigen Paragraph, daß es für eine Differenzialgleichung zwischen x und y, wo also y eine Funkzion des x ist, Werthe des y geben kann, die der Differenzialgleichung Genüge leisten, und doch nicht die wahre Integralgleichung angeben. Denn $y^2 = b^2 - x^2$ leistet der Gleichung

$$x + yy' - y'\sqrt{(x^2+y^2-b^2)} = 0$$

zwar Genüge, ist aber doch nicht das wahre Integral. Denn dieses ist ja

$$x^2 - 2ay - a^2 - b^2 = 0.$$

Eine solche endliche Gleichung, die einer gegebenen Differenzialgleichung Genüge leistet, ohne daß sie in der wahren Integralgleichung mit inbegriffen sei, heißt eine **sonderbare Integralgleichung**, und der daraus gezogene Werth von y in einer Funkzion des x, ist ein **sonderbarer Werth des y**. Dagegen heißen diejenigen Integralgleichungen die nur in der beständigen Größe von einander unterschieden sind, **besondere Integral-**

gleichun-

gleichungen und die darauf beruhenden Werthe des y, sind besondere Werthe desselben.

Es trifft sich oft daß immer bei einer Differenzialgleichung sogleich eine Beziehung zwischen y und x in die Augen fällt, welche Genüge leistet. Will man nun wissen ob man die wirkliche Integralgleichung, oder nur eine sonderbare gefunden hat, so kann man es vermittelst der folgenden Aufgabe erfahren.

§. 12.

Aufgabe.

Gesetzet man finde durch Versuche oder anders eine Beziehung zwischen y und x, welche einer Differenzialgleichung Genüge leiste; es soll untersuchet werden, ob diese Beziehung ein wirkliches Integral ist, oder ob sie nur einen sonderbaren Werth des y angiebt.

Vorbereitung. Es sei $y' = f(x,y)$ die vorgegebene Differenzialgleichung. Das Integral davon sei so beschaffen daß daraus gezogen werde $y = f(x,a)$ wo a die willkürliche beständige Größe ist. Will man nun das sonderbare Integral haben, so muß man die Gleichung $y = f(x,a)$ oder $y - f(x,a) = 0$ in Betrachtung des a allein Differenziren, das Differenzial in Beziehung des a null machen, daraus den Werth von a ziehen, und diesen in die Gleichung $y = f(x,a)$ setzen. Dann muß aus der so veränderten Gleichung $y = f(x,a)$ der Werth von y gezogen werden, und dieser wird ein sonderbarer Werth sein, wie im vorigen Paragraph gelehret worden.

Also muß erstlich $y - f(x,a) = 0$ in Betrachtung des a allein differenziret werden. Hier verschwindet sogleich y, und wenn wir das Differenzial von $f(x,a)$ in Betrachtung

trachtung des a durch $\varphi(x,a)$ ausdrucken, und dieses vorgeschriebener Maßen der Null gleich machen, so haben wir

$$\varphi(x,a) = 0$$

Die Gleichung $y' = \mathfrak{F}(x,y)$ kann auch so ausgedrucket werden, indem man anstatt y setzet $f(x,a)$

$$f'(x,a) = \mathfrak{F}[x,f(x,a)]$$

Wenn wir in dieser Gleichung bloß a als veränderlich betrachten, so muß auch ihre Differenzialgleichung in Betrachtung des a ihre Richtigkeit haben. Diese wollen wir suchen.

Das erste Hauptglied $f'(x,a)$ bestehet aus dem Differenziale von $f(x,a)$ in Betrachtung des x, und man soll jetzt in Betrachtung des a differenziren. Dieses ist aber einerlei, als wenn erst in Betrachtung des a und dann in Betrachtung des x differenziret wird §. 6. Zusatz). Wenn ich also erstlich $f(x,a)$ in Betrachtung des a differenzire, so kommt, wie vorher angenommen worden $\varphi(x,a)$. Differenzire ich jetzt in Betrachtung des x, so kommt $\varphi'(x,a)$ wo sich der Strich neben φ auf x beziehet.

Das zweite Hauptglied ist $\mathfrak{F}[x,f(x,a)]$ oder $\mathfrak{F}(x,y)$, worin a allein veränderlich ist. Hierbei merke man sich daß überhaupt wenn p schon eine Funkzion einer veränderlichen Größe ist, alsdenn $(fp)' = p'f'p$. Es sei zum Beispiel $p = x^2 - b^2$, und $fp = (x^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}$, so ist $(fp)' = \frac{1}{2}(x^2 - b^2)^{\frac{1}{2}-1}.2x$. Hier ist $f'p = \frac{1}{2}(x^2 - b^2)^{\frac{1}{2}-1}$ und $p' = 2x$, so daß das Ganze $\frac{1}{2}(x^2 - b^2)^{\frac{1}{2}-1}.2x = p'f'p$.

Im jetzigen Falle also beträgt das Differenzial von $\mathfrak{F}[x,f(x,a)]$ eigentlich so viel als

$$[x,f(x,a)]' \cdot \mathfrak{F}'[x,f(x,a)]$$

oder weil hier bloß auf dasjenige gesehen wird, was a enthält

$$[f(x,a)]' \cdot F'[f(x,a)]$$

Nun ist, in Betrachtung des a allein $[f(x,a)]' = \varphi(x,a)$ nach obiger Bezeichnung, und da $f(x,a) = y$, so ist der vorige Ausdruck mit diesem einerlei

$$\varphi(x,a) \cdot F'(y)$$

wenn wir unter $F'(y)$ das Differenzial von $F'(x,y)$, bloß in Betrachtung des y genommen, verstehen.

Also um alles kurz zu fassen ist von

$$f'(x,a) = F[x,f(x,a)[$$

die Differenzialgleichung folgende

$$\varphi'(x,a) = F'(y) \cdot \varphi(x,a)$$

Daraus ziehet man

$$F'(y) = \frac{\varphi'(x,a)}{\varphi(x,a)}$$

Wenn man nun den sonderbaren Werth von y haben will, der mit p bezeichnet sein mag, so muß aus $\varphi(x,a) = 0$ der Werth von a gezogen, und dieser in die Gleichung $y = f(x,a)$ gesetzet werden.

Der eben gedachte Werth von a wird eine Funkzion des x sein. Laßt uns nun annehmen $\varphi(x,a) = V(X-a)^m$, wo m größer ist als null, und wo V eine Funkzion von x ist, die nicht unendlich wird wenn $a = X$. Diese Form geben wir dem $\varphi(x,a)$, weil es wirklich $a = X$ giebt, nämlich, wenn man statt

$$\varphi(x,a) = 0$$

schreibet $V(X-a)^m = 0$

Der Exponent m muß größer sein als null; denn wäre

m klei-

m kleiner als null, das heißt, verneinet, so hätte man statt $V(X-a)^m$

$$\frac{V}{(X-a)^m}$$

und wenn $a=X$, so würde dieser Ausdruck nicht null, sondern unendlich werden, wider die Voraussetzung, mittelst welcher der Werth von a aus $\varphi(x,a)=0$ oder $V(X-a)^m=0$ nicht $=\infty$ gezogen werden soll. Ferner muß V so beschaffen sein, daß es für $a=X$ nicht unendlich werde, sonst würde

$$V(X-a)^m=\frac{1}{0}.0^m=\frac{0}{0}\text{ nicht}=0$$

welches letztere doch sein soll. Wir können also mit Recht annehmen $\varphi(x,a)=V(X-a)^m$ wenn wir nur dabei die beiden eben jetzt angeführten Bedingungen für m und für V nicht aus der Acht lassen. Wenn

$$\varphi(x,a)=V(X-a)^m$$

so ist $\varphi'(x,a)=V'(X-a)^m+mVX'(X-a)^{m-1}$

daher $F'(y)=\frac{\varphi'(x,a)}{\varphi(x,a)}=\frac{V'(X-a)^m+mVX'(X-a)^{m-1}}{V(X-a)^m}$

oder $F'(y)=\frac{V'}{V}+\frac{mX'}{X-a}$

Nun wird zugleich $y=p$ und $a'=X$, in diesem Falle hat man

$$F'(p)=\frac{V'}{V}+\frac{mX'}{0}$$

welches eine unendliche Größe ist. Wenn also $F(x,y)$ bloß in Betrachtung des y differenziret wird, und wenn in der Differenzialfunkzion statt y ein gewisser Werth p desselben gesetzet wird, wenn dadurch $F'(y)$ unendlich wird, so ist der Werth p ein sonderbarer Werth.

Auflösung. Es sei gegeben $y' = \mathfrak{F}(x,y)$. Man differenzire $\mathfrak{F}(x,y)$ in Betrachtung des y allein, welches wir durch $\mathfrak{F}'(y)$ anzeigen wollen. Hat man einen gewissen Werth p des y durch Versuche oder sonst heraus gebracht, welcher der Gleichung $y' = \mathfrak{F}(x,y)$ Genüge thut, so setze man diesen Werth in $\mathfrak{F}'(y)$. Wird dadurch $\mathfrak{F}'(y)$ unendlich oder $\frac{1}{\mathfrak{F}'y} = 0$, so ist p ein sonderbarer Werth des y.

Beispiel. Wir wollen das Beispiel von §. 10 wieder vornehmen. Es war dort

$$x - [-y + \sqrt{(x^2+y^2-b^2)}]y' = 0$$

oder $$y' = \mathfrak{F}(x,y) = \frac{x}{-y+\sqrt{(x^2+y^2-b^2)}}$$

Wenn man nun in Betrachtung des y allein differenziret, so kommt

$$\mathfrak{F}'(y) = \frac{x[-1+(x^2+y^2-b^2)^{-\frac{1}{2}}y]}{[-y+\sqrt{(x^2+y^2-b^2)}]^2}$$

Wir haben oben §. 10 gesehen daß die Annahme $y^2 = b^2 - x^2$ oder $y = \sqrt{(b^2-x^2)}$ der gegebenen Differenzialgleichung Genüge leistet, also ist hier $\sqrt{(b^2-x^2)} = p$. Setzet man dieses p oder $\sqrt{(b^2-x^2)}$ in den Werth von $\mathfrak{F}'y$, so wird $x^2+y^2-b^2 = 0$ folglich

$$\mathfrak{F}'(y) = \frac{x[-1+0^{-\frac{1}{2}}y]}{[-y+0^{\frac{1}{2}}]^2}$$

$$= \frac{x\left(-1+\frac{1}{0}y\right)}{y^2}$$

$$= \frac{x}{y^2}\left(-1+\frac{1}{0}y\right)$$

welches eine unendliche Größe ist.

Also

Also ist $y = \sqrt{(b^2 - x^2)}$ ein sonderbarer Werth von y für die Differenzialgleichung

$$y' = \frac{x}{-y + \sqrt{(x^2 + y^2 - b^2)}}$$

§. 13.

Lehrsatz.

Wenn eine Differenzialgleichung von der zweiten Ordnung zwischen x und y gegeben ist, und wenn man auf irgend eine Art zwei dazu gehörige von der ersten Ordnung findet, deren jede eine willkürliche beständige Größe enthält, so kann man aus diesen beiden y' oder $\frac{dy}{dx}$ ausmerzen, wodurch man die vollständige Integralgleichung erhält.

Beweis. Es sei

I) $F(a, b, x, y) = 0$

davon sei die erste Differenzialgleichung

II) $F(a, b, x, y, y') = 0$

und die zweite

III) $F(a, b, x, y', y'') = 0$

Wir verstehen immer unter y' und y'' so viel als $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ und es wird dx als beständig angesehen.

Man ziehe aus der Gleichung I den Werth von a und setze ihn in die Gleichung II. Ziehe nun aus I den Werth von b und setze ihn in II, so entstehen zwei Gleichungen welche folgende Gestalt haben werden.

IV) $\mathfrak{F}(b, x, y, y') = 0$

V) $\mathfrak{F}(a, x, y, y') = 0$

Ziehe aus IV den Werth des b und setze ihn in III. Ziehe auch aus V den Werth von a und setze ihn in III, so entstehet auf beide Arten eine Gleichung von dieser Gestalt

VI) $\mathfrak{F}(x, y, y', y'') = 0$

Diese hat zwei Integrale, nämlich IV mit dem beständigen b, und V mit dem beständigen a. Diese beiden haben nun wiederum I zum vollständigen Integral.

Wenn also eine Gleichung wie VI gegeben ist, und man kann durch Versuche oder auf irgend eine andere Art zwei finden wie IV und V die ihr Genüge leisten, und deren jede eine beständige Größe enthält, so darf man nur aus IV y' ziehen und den Werth in V setzen, oder aus V den Werth von a ziehen und ihn in IV setzen. In beiden Fällen erhält man eine Gleichung die weder y'' noch y' sondern nur a, b, x, y enthält, und also die vollständige Integralgleichung I selbst ist.

Zusatz. Man kann diesen Lehrsatz weiter fortsetzen und ihn auf Differenzialgleichungen der dritten Ordnung anwenden. Denn es sei

I) $\mathfrak{F}(a, b, c, x, y) = 0$

II) $\mathfrak{F}(a, b, c, x, y, y') = 0$

III) $\mathfrak{F}(a, b, c, x, y, y', y'') = 0$

IV) $\mathfrak{F}(a, b, c, x, y, y', y'', y''') = 0$

Aus I ziehe a und setze dessen Werth in II und III, so kommt

V) $\mathfrak{F}(b, c, x, y, y') = 0$

VI) $\mathfrak{F}(b, c, x, y, y', y'') = 0$

Aus

Aus V ziehe b und seze den Werth in VI, so kommt

VII) $\mathfrak{F}(c, x, y, y', y'') = o$

Wenn du anstatt dessen erst a und dann c ausmerzest, so kommt

VIII) $\mathfrak{F}(b, x, y, y', y'') = o$

Wenn du erst b und dann c ausmerzest, so kommt

IX) $\mathfrak{F}(a, x, y, y', y'') = o$

Wenn du aus VII, VIII, IX, a, b und c ziehest, und sie in IV sezest, so kommt

X) $\mathfrak{F}(x, y, y', y'', y''') = o$

Wenn man also zu einer Gleichung der dritten Ordnung, wie x drei Integralgleichungen finden kann, wie VII, VIII, IX, alle drei mit verschiedenen beständigen Größen, so darf man nur aus diesen dreien y'' und y' ausmerzen. Dann bekommt man das vollständige Integral I.

§. 14.

Lehrsaz.

Wenn man eine Differenzialgleichung erster Ordnung zwischen x und y hat, wenn man noch einmal differenziret, wenn man zur zweiten Differenzialgleichung ein Integral der ersten Ordnung findet, welches eine willkürliche beständige Größe enthält, wenn man ferner aus den beiden Gleichungen erster Ordnung y' ausmerzet, so bekommt man das vollständige Integral der aufgegebenen Differenzialgleichung.

Beweis. Es sei gegeben

A) $\mathfrak{F}(x, y, y') = o$

Man differenzire, so hat man

B) $\mathfrak{F}(x, y, y', y'') = 0$

Man integrire B und erhalte dadurch

C) $\mathfrak{F}(a, x, y, y') = 0$

wo a die willkürliche beständige Größe ist. Aus C und A werde y' ausgemerzet, so entstehet eine Gleichung von dieser Form

D) $\mathfrak{F}(a, x, y) = 0$

welche das vollständige Integral von A ist, indem es die willkürliche beständige Größe enthält.

Zusatz. Dieser Lehrsatz kann weiter ausgedehnet werden. Es sei gegeben

A) $\mathfrak{F}(x, y, y') = 0$

Gesetzet man differenzire 2mal, und erhalte dadurch

B) $\mathfrak{F}(x, y, y', y'') = 0$

C) $\mathfrak{F}(x, y, y', y'', y''') = 0$

Gesetzet man finde durch Integrirung der C mit einer beständigen Größe

D) $\mathfrak{F}(a, x, y, y', y'') = 0$

Mittelst A, B und D laßen sich y' und y'' ausmerzen, und man behält das vollständige Integral

E) $\mathfrak{F}(a, x, y) = 0$.

§. 15.

Lehrsatz.

Wenn eine Gleichung von dieser Form gegeben ist

$$Ay + By' + Cy'' + Dy''' + \&c. = 0$$

wo

wo A, B, C, D, u. s. w. Funkzionen von x sind, und wo y', y'', y''', u. s. w. so viel bedeuten als $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, u. s. w.; wenn man für y so viel besondere Werthe p, q, r, &c. findet als Grade in der Differenzialgleichung sind, so ist die vollständige Integralgleichung

$$y = ap + bq + cr + \&c.$$

wo a, b, c willkürliche beständige Größen sind.

Beweis. Hier können p, q, r, u. s. w. nichts anders vorstellen als gewisse Funkzionen von x, die so beschaffen sind, daß wenn man sie statt y in die Gleichung

$$Ay + By' + Cy'' + Dy''' + \&c. = 0$$

setzet, das erste Hauptglied wirklich der Null gleich werde. Also wird sein

$$\text{I)}\quad Ap + Bp' + Cp'' + Dp''' + \&c. = 0$$
$$\text{II)}\quad Aq + Bq' + Cq'' + Dq''' + \&c. = 0$$
$$\text{III)}\quad Ar + Br' + Cr'' + Dr''' + \&c. = 0$$
$$\&c.\quad \&c.$$

Hier heißen p' p'' p''', q' q'' q''', r' r'' r''' u. s. w. so viel als y' y'' y''' u. s. w. in deren Werth man statt y die durch p, q, r, u. s. w. vorgestellete Funkzion von x gesetzet hat.

Multiplizirt man nun I mit a, II mit b, III mit c, so kommt

$$Aap + Bap' + Cap'' + Dap''' + \&c. = 0$$
$$Abq + Bbq' + Cbq'' + Dbq''' + \&c. = 0$$
$$Acr + Bcr' + Ccr'' + Dcr''' + \&c. = 0$$

und wenn man alles addiret

$$A(ap+bq+cr+\&c.)+B(ap'+bq'+cr'+\&c.)$$
$$+C(ap''+bq''+cr''+\&c.)+D(ap'''+bq'''+cr'''+\&c.)$$
$$+\&c.=0.$$

Hier ist weil a, b, c, u. s. w. beständig sind

$$ap'=(ap)'$$
$$bq'=(bq)'$$
$$cr'=(cr)'$$
$$\&c.\ \&c.$$

Alse hat man

$$A[(ap)+(bq)+(cr)+\&c.]+B[(ap)'+(bq)'+(cr)'+\&c.]$$
$$+C[(ap)''+(bq)''+(cr)''+\&c.]+D[(ap)'''+(bq)'''+(cr)'''+\&c.]$$
$$=0$$

Dieses ist die nämliche Gleichung als die gegebene, nur daß statt y stehet $ap+bq+cr+\&c.$, statt y' stehet $(ap)'+(bq)'+(cr)'+\&c.$ oder $(ap+bq+cr+\&c.)'$, u. s. w. Daraus siehet man daß wenn p, q, r, u. s. w. der Gleichung Genüge leisten, und besondere Werthe von y sind, alsdenn auch ap, bq, cr, $\&c.$, und auch $ap+bq+cr+\&c.$ Genüge leisten. Und da, durch die Einsetzung des $ap+bq+cr+\&c.$, so viel beständige Größen in die Gleichung

$$y=ap+bq+cr+\&c.$$

hineinkommen, als Grade in der Differenzialgleichung sind, so ist diese letztere Gleichung das vollständige Integral der gegebenen Differenzialgleichung.

Anmer-

Anmerkung. Solche Funkzionen von x und y wie

$$Ay + By' + Cy'' + Dy''' + \&c.$$

wo y und dessen Differenziale nicht höher als bis zur ersten Potenz steigen, heißen **Linear-Gleichungen.** Man giebt diesen Namen auch in der gemeinen Algebra überhaupt allen Gleichungen vom ersten Grade, wo also die eine unbekannte Größe nur in der ersten Potenz vorkommt.

Anmerkung II. Weiter können wir uns hier in dergleichen Untersuchungen nicht einlassen, welche für ein Lehrbuch zu weitläuftig werden möchten. Wer mehr davon zu wissen verlanget wird in de la Grange's Theorie der analytischen Funkzionen eine weitläuftigere Belehrung finden.

§. 16.

Die von Herrn de la Grange bei mechanischen Aufgaben gebrauchte Variazionsrechnung ist zwar eigentlich nichts anders als eine Art von Differenzialrechnung, und kann auch allenfalls durch diese ersetzet werden. Allein sie hat doch ihren eigenthümlichen Gesichtspunkt, und verdienet, als ein besonderer Zweig des Kalkuls, unsere Aufmerksamkeit. Deswegen will ich hier die Gründe dieser Rechnungsart kürzlich vortragen.

§. 17.

Es sei gegeben eine Gleichung zwischen x und y, oder welches einerlei ist, es sei y eine Funkzion von x. Es seien x und x' zwei unendlich wenig verschiedene Werthe von x, es seien y und y' die dazu gehörigen Werthe des y. Man

y. Man merke daß hier die Striche bei x und y gar nicht die Bedeutung haben, die ihnen im Anfange dieses Hauptstückes beigeleget worden. In algebraischen Untersuchungen fehlet es oft an Zeichen, und man ist gezwungen dieselbigen in verschiedener Bedeutung zu gebrauchen, woraus aber kein Irrthum entstehen kann, wenn man nur den jedesmaligen Sinn genau angiebt.

Laßt uns nun annehmen es geschehe in der Gleichung oder Funkzion, wovon kurz vorher die Rede war, eine unendlich kleine Veränderung, so zum Beispiel, daß irgend eine beständige Größe in der Gleichung um ein unendlich weniges größer oder kleiner werde. In der veränderten Funkzion wollen wir nun wiederum zwei Werthe des x annehmen, nämlich X und X′, so daß X um unendlich weniges größer sei als das vorige x, und X′ um unendlich weniges größer als das vorige x'. Es seien Y und Y′ die zu X und X′ gehörigen Werthe des y.

Nun wird Y ein wenig von y unterschieden sein, theils weil X etwas größer ist als x, theils weil die Gleichung aus welcher der Werth des Y genommen ist, von der erst gegebenen etwas verschieden ist. Aus der nämlichen Ursache wird Y′ dem y' nicht völlig gleich sein. Die Unterschiede werden hier immer unendlich klein angenommen.

§. 18.

Weil x und x' zur nämlichen Gleichung gehören, so ist, wie gewöhnlich $x' - x = \partial x$. Aus derselbigen Ursache ist $y' - y = \partial y$. Ebenfalls ist in der veränderten Gleichung $X' - X = \partial X$, $Y' - Y = \partial Y$.

Weil

Weil aber x und X, x' und X', y und Y, y' und Y' nicht völlig zur selbigen Gleichung gehören; so kann der unendlich kleine Unterschied dieser Größen nicht durch das gewöhnliche Differenzialzeichen ausgedrucket werden, und auch nicht eigentlich den Namen eines Differenzials führen.

Deswegen nennt man einen solchen unendlich kleinen Unterschied eine **Variazion**, und man kann ihn mit dem Zeichen δ andeuten. Also ist

$$X - x = \delta x$$
$$X' - x' = \delta x'$$
$$Y - y = \delta y$$
$$Y' - y' = \delta y'$$

§. 19.

Nicht nur die Größen selbst sind der Variazion unterworfen, sondern auch ihre Differenziale von jeder Ordnung. Denn es ist klar daß, zum Beispiel, der Werth von dy, d^2y, d^3y, u. s. w. in der ursprünglich gegebenen Gleichung nicht völlig derselbige sein wird als in der veränderten Gleichung. Diese Variazion der Differenziale wird ebenfalls durch δ angedeutet, und man schreibet δdy, δd^2y, δd^3y, u. s. w.

§. 20.

So wie die Differenziale ihre Variazionen haben, so haben auch wiederum die Variazionen ihre Differenziale. Nämlich die Variazion für y und Y ist nicht die nämliche als für y' und Y', und der Unterschied dieser beiden

beiden Variazionen ist das Differenzial der Variazion. Also ist der Unterschied zwischen $Y - y$ und zwischen $Y' - y'$ das Differenzial der Variazion von y. Dieses wird also geschrieben δdy.

§. 21.

So wie die Differenziale ihr Integrale haben, so haben auch die Variazionen die ihrigen. Nämlich das Integral einer Variazion ist die Funkzion ohne Variazionen woraus sie hergeleitet ist, oder hergeleitet werden kann.

§. 22.

Lehrsatz.

Das Differenzial der Variazion einer veränderlichen Größe ist gleich der Variazion des Differenzials der nämlichen Größe.

Beweis. Es seien y und y' zwei auf einander folgende veränderliche Größen. Gesetzt es verwandele sich y in Y, und y' in Y' mittelst der veränderten Gleichung, so ist im natürlichen Zustande $y' - y = dy$, und im variirten $Y' - Y = dY$. Der Unterschied ist

$$\delta dy = dY - dy = Y' - Y - y' + y$$

Ferner ist für y und Y die Variazion $Y - y = \delta y$; für y' und Y' ist sie $Y' - y' = \delta y'$. Der Unterschied beider Variazionen beträgt

$$d\delta y = \delta y' - \delta y = Y' - y' - Y + y = \delta dy$$

Also ist $\delta dy = \delta dy$, welches bewiesen werden sollte.

§. 23.

Der vorige Lehrſatz kann auch auf höhere Differenziale angewendet werden.

Es iſt $\delta d^2y = \delta d dy = \delta d(dy) = d\delta(dy)$.

Da nun $\delta dy = d\delta y$, ſo iſt $d\delta dy = dd\delta y = d^2\delta y$, oder $\delta d^2y = d^2\delta y$.

Es iſt $\delta d^3y = \delta d(d^2y) = d\delta d^2y$.

Da eben jetzt bewieſen worden, daß $\delta d^2y = d^2\delta y$, ſo iſt $d\delta d^2y = dd^2\delta y = d^3\delta y$, oder $\delta d^3y = d^3\delta y$.

So kann der Beweis weiter fortgeſetzet werden. Es iſt alſo überhaupt $\delta d^ny = d^n\delta y$.

§. 24.

Lehrſatz.

Die Variazion des Integrals einer Differenzialfunkzion, iſt gleich dem Integrale der Variazion derſelbigen Differenzialfunkzion.

Beweis.

Es ſeien y und y' zwei auf einander folgende veränderliche Größen, und es mögen ſich dieſe verwandeln in Y und Y'. Es ſei ferner

$$y' - y = Z$$

ſo iſt $y = \int Z$

und $Y - y = \delta \int Z$

Der

Der Unterschied Z war erstlich $y'-y$, verwandelt sich aber in $Y'-Y$, es ist daher

$$(Y'-Y)-(y'-y)=\delta Z$$

oder $$(Y'-y')-(Y-y)=\delta Z$$

Da nun $(Y'-y')-(Y-y)$ die Zunahme von $Y-y$ ist, so ist $Y-y$ das Integral davon, also

$$Y-y=\int \delta Z$$

und da auch $Y-y=\delta \int Z$

so ist $$\int \delta Z=\delta \int Z$$

§. 25.

Aufgabe.

Eine gegebene Funkzion variiren.

Auflösung. Da die Variazionen der einzelnen Größen nichts anders sind als unendlich kleine Wachsthüme dieser Größen; so werden sie eben so behandelt wie die Differenziale; nur mit dem Unterschiede daß man beim Variiren das Zeichen δ anstatt d gebrauchet. Wenn die gegebene Funkzion Differenzialgrößen enthält, welches der gewöhnlichste Fall ist, so werden diese ebenfalls als variable Größen betrachtet und behandelt, wovon wir in der Folge Beispiele sehen werden. Wenn in der gegebenen Funkzion kein Differenzialzeichen vorhanden ist, so könnte das Variiren dadurch geschehen, daß man erstlich mit d differenzirte, hernach aber alle d in δ verwandelte. Ist aber das d schon in der Funkzion vorhanden, so würde dieser Weg auf lauter Verwirrung führen; man muß also sogleich das δ gebrauchen, welches auch im erstgemeldeten Falle kürzer und bequemer ist.

§. 26.

Aufgabe.

Es sei Z eine Funkzion zweier, dreier oder mehrerer veränderlichen Größen und ihrer Differenziale von verschiedenen Ordnungen, mit einem Worte, eine beliebige Differenzialfunkzion: Es wird gefraget welche Beziehung oder Gleichung zwischen den in Z enthaltenen veränderlichen Größen statt finden muß, wenn das Integral $\int Z$ seinen größten oder kleinsten Werth bekommen soll.

Vorbereitung. Da zwischen den in Z enthaltenen veränderlichen Größen unendlich viele Beziehungen oder Gleichungen möglich sind, so stelle man sich vor eine solche Gleichung verändere sich allmählig, so variiren die veränderlichen Größen selbst, wie auch die von ihnen abhängende Funkzion $\int Z$. Findet nun für $\int Z$ ein größter oder kleinster Werth statt, so muß für diesen die Variazion von $\int Z$ null seïn, aus eben den Gründen weswegen das Differenzial einer Funkzion null wird, wenn die Funkzion ihren größten oder kleinsten Werth erreichet.

Hieraus folget nun diese Regel: Man variire $\int Z$, und setze dann $\delta \int Z = 0$, was aus dieser Annahme gefolgert wird, giebt die Beziehung welche zwischen den in Z enthaltenen veränderlichen Größen obwalten muß, wenn $\int Z$ ein Größtes oder Kleinstes werden soll.

Da aber $\delta \int Z = \int \delta Z$, so kann man auch erstlich Z variiren, dann integriren, und das Integral der Null gleich setzen.

Auflösung. Man variire die Funkzion Z, man

integrire die variirte Funkzion, und mache $\int dZ = 0$; so erhält man das verlangte Verhältniß zwischen x und y.

Anmerkung. Diese Aufgabe ist in einigen Fällen der höheren Meßkunst anwendbar. Da wir uns aber vorgenommen haben, in diesem Werke bloß die reine Rechenkunst ohne alle Einmischung der Geometrie vorzutragen, so müssen wir uns begnügen die Gründe der Variazionsrechnung erläutert zu haben. Wer seine mathematischen Studien fortsetzet, wird in der Folge Gelegenheit finden, das Erlernte anzuwenden.

Verzeichniß einiger Druckfehler im ersten Theil der Algebra.

Seite 14 Zeile 7 u. 8 statt obgleich, lese man aber.
— 34 Z. 9 st. der Abece, l. m. des Abece.
— 35 Z. 5 v. unten stehet §. 27 st. §. 22.
— 165 Z. 5 stehet eine logarithmische Größe, st. eine logarithmische Größe (ohne Komma).
— 255 Z. 9 v. unten, stehet sondern nur, st. sondern auch.
— 255 Z. 7 v. unten stehet man muß also st. man muß sich also.

Inhalt des ersten Theiles.

Erstes Hauptstück.

Von der Addizion oder Zusammensetzung der Größen.

§. 1 bis 4. Vorläufige Erklärungen über die Größen oder Quantitäten, deren Bezeichnung, die Algebra, die Gleichheit und Ungleichheit der Größen. Seite 1
§. 5 bis 8. Erste Gründe der algebraischen Addizion. 2
§. 9 bis 11. Von den zusammengesetzten Größen und den Verwechslungen ihrer Theile. 5
§. 12 bis 17. Von den Zahlen, der Zählung, und der Addizion der Zahlen. 11
§. 18 und 19. Von den Koeffizienten und deren Addizion. 16
§. 20. Von der Probe der Addizion. 17
§. 21 und 22. Allgemeine Grundsätze über die Addizion. 18

Zweites Hauptstück.

Von der Subtrakzion oder von der Abziehung der Größen.

§. 1 bis 11. Von der algebraischen Subtrakzion. Seite 19

§. 12. Von der Addizion solcher Größen, wo das Zeichen — vorkommt. Seite 26

§. 13. Von der Abziehung der Zahlen. 27

§. 14 und 15. Allgemeine Regeln der algebraischen Addizion und Subtrakzion, sowohl in Betrachtung der Koeffizienten als der Zeichen. 29

§. 16. Probe der Subtrakzion. 31

§. 17 bis 26. Allgemeine Grundsätze über die Subtrakzion, und die daraus entstehenden Gleichungen. 31

§. 27 und 28. Erklärung der bejaheten und verneinten Größen. 36

Drittes Hauptstück.

Von der Multiplikazion oder Vervielfältigung der Größen.

§. 1 bis 9. Anfangsgründe der algebraischen Multiplikazion. 38

§. 10 und 11. Von der Anzahl aller möglichen Verwechslungen der Faktoren. 43

§. 12 bis 15. Von der Ausmessung der Zahlen und den Primzahlen. 47

§. 16 bis 19. Fortsetzung der algebraischen Multiplikazion. 50

§. 20. Addizion und Subtrakzion der Produkte 53

§. 21. Multiplikazion der bestimmten Zahlen. 54

§. 22. Probe der Multiplikazion. 58

§. 23 und 24. Allgemeine Grundsätze über die Multiplikazion. 58

Viertes Hauptstück.

Von der Division oder Theilung der Größen.

§. 1 bis 12. Von der algebraischen Division, nebst der Erklärung der Brüche. Seite 66

§. 13. Division der bestimmten Zahlen. Seite 70
§. 14. Probe der Division. 76
§. 15 bis 17. Einige Grundsätze der Division, worauf sich die folgende Lehre von den Brüchen gründet. 76
§. 18 bis 29. Veränderung des Nenners, Addizion, Subtrakzion, Multiplikazion, Division der Brüche, und deren Verwandelung in unendliche Reihen. 77
§. 30 bis 33. Lehre von den Dezimalbrüchen und Aufgaben die sich darauf beziehen. 30
§. 34 bis 41. Lehre und Aufgaben über die benannten Brüche, oder benannten Zahlen. 101
§. 42 bis 47. Allgemeine Grundsätze der Division, und deren Anwendung auf die Auflösung leichter Gleichungen. 109

Fünftes Hauptstück.

Von der Erhebung der Größen, oder von Potenzen und Wurzeln.

§. 1 bis 7. Erklärungen und Grundsätze über die Potenzen, und Wurzeln, nebst dem Ursprunge der verneinten und gebrochenen Exponenten 112
§. 8 und 9. Von der Multiplikazion und Division gleichstämmiger Potenzen 117
§. 10 bis 14. Wie man eine Potenz, einen Bruch, ein Produkt, eine zusammengesetzte Größe erheben soll. 121
§. 15 bis 20. Von den Potenzen und Wurzeln der Zahlen, nebst der Erklärung der irrazionalen Zahlen. 127
§. 21 bis 25. Die Lehre von den Verwechslungen. 143
§. 26 bis 29. Anwendung der vorigen Lehre auf die Potenzen, und Beweis der Newtonischen Regel. 154
§. 30 bis 33. Einige Grundsätze über die Erhebung der Größen und Gebrauch dieser Verrichtung bei der Auflösung leichter Gleichungen. 162

Sechstes Hauptstück.

Von der Anweisung der Größen, oder von den Logarithmen.

§. 1 bis 11. Theorie des Verfassers von den logarithmischen Größen, nebst einigen Aufgaben, die sich darauf beziehen. Seite 164

§. 12 bis 14. Zwei Methoden des Verfassers, um den Logarithmus einer Zahl für eine gegebene Grundzahl zu finden, nebst Erklärung der Kettenbrüche. 176

§. 15 bis 24. Verschiedene Aufgaben, betreffend den Gebrauch der Logarithmen und der Logarithmen-Tafeln 184

§. 25 bis 28. Allgemeine Grundsätze, die Exponenzialzion betreffend, und Auflösung leichter Gleichungen vermittelst dieser Operazion 192

§. 29 bis 31. Allgemeine Bemerkungen über Logarithmen und algebraische Rechnungsarten. 193

Anhang zum sechsten Hauptstücke, worin die Verfertigung der Logarithmentafeln, und deren Gebrauch weitläuftiger erörtert wird. 196

Anmerkung. Die Lehre von den Logarithmen wird wiederum im 18ten Hauptstücke vorgenommen und weiter ausgeführet. Was also hier noch fehlet muß dort gesuchet werden.

Siebentes Hauptstück.

Von verneinten und eingebildeten Größen.

§. 1 und 2. Einleitung. Seite 236

§. 3 bis 6. Vom Gebrauche der verneinten Größen in der Addizion, Subtrakzion, Multiplikazion und Division. 237

§. 7 bis 16.

§. 7 bis 16. Von dem Gebrauche und der Bedeutung der verneinten Größen in der Erhebung, das ist bei Potenzen und Wurzeln; nebst der Erklärung der eingebildeten Größen. Seite 239

§. 17. Vom Gebrauche der verneinten Größen bei der Anweisung oder Erforschung der Logarithmen. 248

Achtes Hauptstück.

Von der Gleichheit der Unterschiede.

§. 1. Erklärung des Wortes Unterschied. Seite 249

§. 2 bis 13. Erklärung des Verhältnisses, des Gleichverhältnisses, und der Fortschreitung, sowohl überhaupt als besonders im arithmetischen Verstande. 249

§. 14 bis 20. Von dem getrennten arithmetischen Gleichverhältnisse. 255

§. 21 bis 24. Von dem zusammenhängenden arithmetischen Gleichverhältnisse. 260

§. 25 bis 30. Von der arithmetischen Fortschreitung. 263

Neuntes Hauptstück.

Von der Gleichheit der Razionen.

§. 1 bis 9. Erklärungen der Razion oder des geometrischen Verhältnisses, des geometrischen Gleichverhältnisses, und der geometrischen Fortschreitung. Seite 271

§. 10 und 11. Geometrisches Verhältniß, welches allemal bei der Multiplikazion und Division statt findet. 276

§. 12 bis 19. Von dem getrennten geometrischen Gleichverhältnisse. 277

§. 20 bis 23. Von dem zusammenhängenden geometrischen Gleichverhältnisse. 284

§. 24 bis 29. Von der geometrischen Fortschreitung. 287
§. 30 bis 38. Von der geraden Regel de Tri 291
§. 39. Von der umgekehrten Regel de Tri. 299
§. 40 und 41. Von der zusammengesetzten, sowohl geraden als umgekehrten Regel de Tri. 300
§. 42. Von der Zins-Rechnung. 305
§. 43. Von der Termin-Rechnung. 309
§. 44. Von der Gesellschaft-Rechnung. 315
§. 45. Von der Ketten-Rechnung. 318
§. 46. Die Namen einiger anderer Rechnungsarten, welche auf die Regel de Tri gegründet sind. 321

Zehntes Hauptstück.

Von der Gleichheit der Logarithmen.

§. 1 bis 10. Neue Lehre von logarithmischen Gleichverhältnissen. Seite 322
§. 11 und 12. Von dem zusammenhängenden logarithmischen Gleichverhältnisse. 328
§. 13 bis 16. Von der logarithmischen Fortschreitung. 330
§. 17. Anmerkung über die vorgetragene Lehre. 335

Eilftes Hauptstück.

Von den Gleichungen mit einer einzigen unbekannten Größe.

§. 1. Einleitung. Seite 336
§. 2 und 3. Von der Auflösung der reinen Gleichungen. 336
§. 4 bis 11. Von den vermischten Gleichungen, deren Einrichtung und Veränderungen. 343

§. 12 bis 21. Von der Entstehung der Gleichungen von höheren Graden aus einfachen, und von den Wurzeln der Gleichungen. Seite 350

§. 22 bis 24. Von der Erforschung der Wurzeln für Gleichungen, wo die Koeffizienten bestimmte Zahlen sind. 356

§. 25 bis 27. Von der Auflösung der quadratischen, kubischen und biquadratischen Gleichungen durch allgemeine Formeln. 366

§. 28 bis 30. Von der Falsi-Rechnung. 382

Inhalt des zweiten Theiles.

Zwölftes Hauptstück.

Von den Gleichungen, mit mehr als einer unbekannten Größe.

§. 1 bis 3. Auflösung der bestimmten Gleichungen von zwei oder mehr unbekannten Größen. Seite 3
§. 4 bis 7. Auflösung der unbestimmten Gleichungen. 14
§. 8 und 9. Von der Alligazion-Rechnung. 24
§. 10. Von der Cöci-Rechnung. 33
§. 11. Verwandschaft der Alligazion-Rechnung und Cöci-Rechnung. 40

Dreizehntes Hauptstück.

Von den Funkzionen.

§. 1 bis 14. Erklärungen über die Funkzionen, ihre verschiedene Arten, ihre Grade, ihre Entstehung. Seite 46
§. 15 bis 17. Von dem Gebrauche der unbestimmten Koeffizienten, und von der Verwandelung einer gebrochenen

brochenen oder irrazionalen Funkzion in einzelne Brüche oder in eine unendliche Reihe. Seite 58
§. 18 bis 27. Von den Gleichungen zwischen veränderlichen Größen. 69

Vierzehntes Hauptstück.

Von den Veränderungen der Funkzionen.

§. 1 bis 7. Von der ersten Veränderung einer Funkzion oder Gleichung. Seite 76
§. 8 bis 13, Von den höheren Veränderungen der Funkzionen und Gleichungen. 83
§. 14 bis 16. Lehrsätze über die Veränderungen der Funkzionen. 93

Funfzehntes Hauptstück.

Von der Erfindung der Funkzionen aus ihren Veränderungen, und von den Reihen.

§. 1 bis 8. Von den Summen der Veränderungs-Funkzionen. 99
§. 9 und 10. Von der willkührlichen beständigen Größe, die zur vollständigen Summe einer Veränderungs-Funkzion gehört 106
§. 11 bis 15. Von den Reihen, deren allgemeinen Gliedern, deren Aggregaten. 110
§. 16 bis 19. Von den vieleckigen Zahlen. 123
§. 20 bis 22. Von den figurirten Zahlen. 131
§. 23. Von einigen andern Zahl-Reihen, und von den geometrischen Fortschreitungen, die ohne Ende abnehmen, 136

Sechszehntes Hauptstück.

Von den unendlich kleinen Veränderungen der Funkzionen, oder von der Differenzial-Rechnung.

§. 1 bis 12. Von den sehr kleinen Veränderungen und deren Berechnung. Seite 139

§. 13 bis 21. Erklärung der unendlich kleinen Veränderungen oder der Differenziale. Seite 149

§. 22 bis 27. Von den höheren Differenzialen. 151

§. 28 bis 33. Von den theilhaften Differenzen und deren Eigenschaften. 167

Siebzehntes Hauptstück.

Von einigen Anwendungen der Differenzial-Rechnung.

§. 1 bis 3. Von der Erfindung der vollständigen Veränderung einer Funkzion aus ihrem Differenziale, nebst dem Beweise der Newtonschen Regel für die binomischen Potenzen, in dem Falle, wo der Exponent verneinet oder gebrochen ist. Seite 178

§. 4. Von dem Werthe des Verhältnisses $\frac{0}{0}$. 185

§. 5 bis 9. Von dem größten und kleinsten Werthe einer Funkzion. 191

Achtzehntes Hauptstück.

Anwendung der Differenzial-Rechnung auf Exponenzial-Größen und Logarithmen.

§. 1. Was eine Exponenzial-Größe ist, wie die Logarithmen und Proporzional-Zahlen daraus entstehen. Seite 202

§. 2 bis 7. Von dem Modulus oder der Subtangente eines jeden Systemes, bloß algebraisch betrachtet und ohne Beziehung auf die Geometrie. 202

§. 8. Von der Differenziazion der Logarithmen und Exponenzial-Größen. 208

§. 9 bis 11. Von der Ausdrückung der Logarithmen und Proporzional-Zahlen durch unendliche Reihen. Seite 210

§. 12 und 13. Von der vollständigen Veränderung der Proporzional-Zahlen und Logarithmen. 217

Neunzehntes Hauptstück.

Von der Anwendung der Differenzial-Rechnung auf Kreis-Größen.

§. 1 bis 5. Erklärung der Kreis-Größen, bloß algebraisch, und als unendliche Reihen betrachtet. Seite 220

§. 6 und 7. Differenziazion der Kreis-Größen. 229

Zwanzigstes Hauptstück.

Von der Erfindung der Funkzionen aus ihren Differenzialen, oder von der Integral-Rechnung.

§. 1 bis 8. Von der Integration der Differenzial-Funkzionen und Gleichungen von der ersten Ordnung, und mit einer einzigen veränderlichen Größe. Seite 241

§. 9 bis 11. Von der Integrazion der Differenzial-Funkzionen und Gleichungen von der ersten Ordnung, mit zwei veränderlichen Größen. 262

§. 12 bis 14. Von der Integrazion der Differenzial-Funkzionen von der zweiten Ordnung. 271

Ein und zwanzigstes Hauptstück.

Von einigen merkwürdigen Eigenschaften der Funkzionen und von der Variazionsrechnung.

§. 1. Einleitung. Seite 283

§. 2 bis 7. Von der Entwickelung der Funkzionen durch unendliche Reihen. Seite 283

§. 8 bis 15. Verschiedene Bemerkungen über die Differenzialfunkzionen und ihre Integrale. 299

§. 16 bis 26. Von der Variazionsrechnung. 315

3 9015 06531 2764